## Title
Triades et familles de courbes gauches



Authors
Hartshorne, Robin
Martin-Deschamps, Mireille
Perrin, Daniel

Publication Date
1998-03-24

Peer reviewed

# TRIADES ET

# FAMILLES DE COURBES GAUCHES

Robin HARTSHORNE

Mireille MARTIN-DESCHAMPS

Daniel PERRIN

# TABLE DES MATIÈRES

# Introduction

Cet article concerne la classification des courbes gauches, c'est-à-dire l'étude du schéma de Hilbert $H_{d,g}$ des courbes (localement Cohen-Macaulay et équidimensionnelles), de degré $d$ et genre arithmétique $g$, de $\mathbf{P}^3$ (espace projectif de dimension 3 sur un corps $k$ algébriquement clos). Il s'inscrit dans le programme énoncé voilà déjà plusieurs années par deux d'entre nous dans [MDP1]. La voie d'accès au schéma de Hilbert que nous privilégions est l'utilisation du module de Rao. Si on pose $R = k[X, Y, Z, T]$, le module de Rao d'une courbe $C$ est le $R$-module gradué de longueur finie :

$$M_C = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1 \mathcal{J}_C(n).$$

L'utilisation de ce module a conduit à stratifier le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ par les sous-schémas à cohomologie constante $H_{\gamma,\rho}$ sur lesquels les dimensions $h^i \mathcal{J}_C(n)$ des espaces de cohomologie sont constantes et déterminées par les fonctions $\gamma$ (liée à la postulation $h^0 \mathcal{J}_C(n)$) et $\rho(n) = h^1 \mathcal{J}_C(n)$, cf. [MDP1] VI, (la spécialité $h^2 \mathcal{J}_C(n) = h^1 \mathcal{O}_C(n)$ est déterminée par les deux autres). Sur le schéma $H_{\gamma,\rho}$ on a un morphisme $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$ (à valeurs dans le foncteur des structures de modules de dimensions indiquées par la fonction $\rho$), qui à une courbe $C$ associe son module de Rao $M_C$. L'étude de $H_{d,g}$ est alors décomposée en trois étapes : l'étape du bas qui consiste à étudier $E_\rho$ et a été abordée notamment dans [MDP2] (cf. aussi [G]), l'étape intermédiaire qui revient à étudier $\Phi$ et qui a été résolue dans [MDP1] VII : $\Phi$ est lisse, irréductible et on connaît la dimension de ses fibres, et enfin l'étape du haut qui étudie le recollement des $H_{\gamma,\rho}$ pour obtenir des informations globales sur $H_{d,g}$.

C'est de cette dernière étape dont il est question ici. L'objectif est d'analyser les spécialisations dans le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ ; précisément, si $H_0$ (resp. $H$) est une composante irréductible de $H_{\gamma_0,\rho_0}$ (resp. $H_{\gamma,\rho}$), on cherche à quelles conditions $H_0$ est adhérente à $H$ (i.e. $H_0 \subset \overline{H}$), voire faiblement adhérente (i.e. $H_0 \cap \overline{H} \neq \emptyset$).

Cette dernière condition signifie simplement qu'il existe une famille de courbes paramétrée par un anneau de valuation discrète $A$, dont le point spécial $C_0$ est dans $H_0$ et dont le point générique $C$ est dans $H$.

Une question fondamentale, mais sans doute difficile, est de donner des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de telles familles. Il y a, en tous cas, deux conditions nécessaires. La première est une condition de semi-continuité sur les dimensions des espaces de cohomologie : si $C_0$ est une spécialisation de $C$ on a les inégalités $h^i \mathcal{J}_C(n) \leq h^i \mathcal{J}_{C_0}(n)$ pour tout $i$ et tout $n$. La deuxième concerne les structures des modules de Rao : on montre (cf. 5.9 ci-dessous) que le module $M_C$ est une déformation plate d'un sous-quotient (i.e. un quotient d'un sous-module), de $M_{C_0}$. Cette condition est à la base de notre approche de la question, *via* les modules de Rao.

Dans le cas des courbes sur un corps on sait, à partir d'un module de longueur finie $M$, décrire les courbes (notamment minimales) de la classe de biliaison qu'il définit. Cela repose essentiellement sur le calcul de la fonction $q$ associée à $M$, cf. [MDP1] IV. Notre objectif ici est de généraliser ce processus pour construire des familles de courbes.

Pour cela, il faut disposer d'une notion qui généralise au cas des familles de courbes celle de module de Rao ordinaire (i.e. de module de longueur finie). On est ainsi à la recherche, pour tout anneau noethérien $A$, d'un ensemble $\Theta(A)$ dont les éléments permettent de décrire les familles de modules de Rao de dimensions variables paramétrées par $A$. On doit aussi disposer d'une application $\Psi_A$ de $H_{d,g}(A)$ dans $\Theta(A)$ qui associe à une famille de courbes $\mathcal{C}$ paramétrée par $A$ un élément $\Psi_A(\mathcal{C})$ de $\Theta(A)$ qui décrive la variation des modules de Rao des courbes de la famille. Plus précisément, si on s'inspire du rôle que jouent les modules de Rao ordinaires vis à vis des courbes sur un corps on attend d'une telle application les propriétés suivantes :

1) une propriété de surjectivité : tout élément de $\Theta(A)$, vérifiant des conditions convenables est, à décalage près, image par $\Psi_A$ d'une famille de courbes (dans le cas ordinaire, tout module de longueur finie est, à décalage près, le module de Rao d'une courbe : ceci est l'une des assertions du théorème de Rao, cf. [R]),

2) une description des fibres de $\Psi_A$ : deux familles de courbes ayant même image par $\Psi_A$ à décalage près, sont dans la même classe de biliaison ou liaison paire (dans le cas ordinaire c'est le deuxième point du théorème de Rao, cf. [R]),

3) une description des familles minimales : en complément du point 1), un élément de $\Theta(A)$ étant donné, il s'agit de décrire les familles minimales (au sens du moindre décalage) qui lui correspondent (dans le cas ordinaire c'est le calcul des courbes minimales effectué dans [MDP1] IV via la fonction $q$) et de décrire les autres familles (et en particulier de préciser les décalages possibles) à partir de celles-ci (c'est l'analogue pour les familles du théorème de Lazarsfeld-Rao qui montre qu'on passe des courbes minimales aux autres par des biliaisons élémentaires ascendantes, cf. [LR], [BBM] ou [MDP1] IV),

4) une notion de dualité sur les éléments de $\Theta(A)$ qui corresponde sur les courbes à la notion de liaison impaire, (généralisation, là encore, du théorème de Rao),

5) enfin, une étude de l'application $\Psi$ qui généralise dans la mesure du possible les assertions de lissité et d'irréductibilité formelles du théorème de l'étape intermédiaire (cf. [MDP1] VII 1.1 et 1.5). Cette étude, qui nécessite de munir $\Theta$ d'une structure algébrique, passe par la généralisation au cas des familles des notions de résolutions de type $N$ et $E$, cf. [MDP1].

L'objectif de cet article est de poser les bases de la théorie en définissant la notion de triade qui va être la généralisation de celle de module de Rao ($\Theta(A)$ sera l'ensemble des triades sur $A$ modulo une certaine relation de pseudo-isomorphisme), en définissant la flèche $\Psi_A$ et en montrant, sur un anneau local, la plupart des propriétés attendues : la surjectivité 1), le lien avec la biliaison 2), la description des familles minimales et le théorème de Lazarsfeld-Rao 3), la dualité et son lien avec la liaison impaire 4) et en introduisant les notions de faisceau triadique et de résolutions (triadiques) de type $N$ et $E$ de 5).

Via les faisceaux triadiques qui jouent un rôle d'intermédiaire entre courbes et triades, les démonstrations des points 1) à 4) ci-dessus reposent en grande partie sur nos deux articles [HMDP1] et [HMDP2].

Commençons par expliquer les idées qui conduisent à la notion de triade.

Pour définir $\Theta(A)$ et $\Psi_A$, une idée (trop) simple consiste à prendre pour $\Theta(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $R_A = A[X,Y,Z,T]$-modules gradués $M_A = \bigoplus M_{A,n}$ tels que les $M_{A,n}$ soient de type fini sur $A$ et presque tous nuls, puis à prendre comme application $\Psi_A$ celle qui associe à une famille de courbes $\mathcal{C}$ la famille de modules $H^1_* \mathcal{J}_\mathcal{C} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1(\mathbf{P}_A, \mathcal{J}_\mathcal{C}(n))$.

Cette formule permet de définir, sur le sous-schéma des courbes à cohomologie constante, le morphisme évoqué plus haut $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$, mais elle n'est pas valable sur $H_{d,g}$ tout entier. La raison fondamentale de ce fait est que si $\mathcal{C}$ est une famille de courbes qui n'est pas à spécialité constante ([1]) le $A$-module $H^1_* \mathcal{J}_\mathcal{C}$ ne commute pas au changement de base, c'est-à-dire que le module de Rao d'une fibre $\mathcal{C} \otimes_A k(t)$ n'est pas le module $H^1_* \mathcal{J}_C \otimes_A k(t)$, voir l'exemple de la famille $\mathcal{C}_2$ ci-dessous. On ne peut donc se contenter pour décrire la variation du module de Rao dans une famille de courbes de considérer un $R_A$-module global $M_A$ et ses fibres $M_A \otimes_A k(t)$.

L'idée que nous proposons pour surmonter cette difficulté s'inspire de ce que l'on fait pour prouver les théorèmes de cohomologie et changement de base, cf. par exemple [AG] III §12. Elle consiste, dans un premier temps, à regarder les foncteurs $V : Q \mapsto V(Q)$, de la catégorie des $A$-modules dans la catégorie des $R_A$-modules gradués (en pensant notamment comme $A$-modules aux corps résiduels $k(t)$ pour $t \in T$). Bien sûr, un $A$-module $M_A$ fournit un cas particulier de tel foncteur, celui qui associe à $Q$ le module gradué $M_A \otimes_A Q$, mais plus généralement, à une famille de courbes $\mathcal{C}$ quelconque est associé le foncteur de Rao $V_\mathcal{C} : Q \mapsto \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1(\mathbf{P}_A, \mathcal{J}_\mathcal{C}(n) \otimes_A Q)$ qui décrit en particulier la variation du module de Rao en les points de $T$.

Bien entendu, si l'on ne fait pas d'hypothèses complémentaires, cette notion de foncteur est trop grossière. Nous allons examiner quelques exemples de familles de courbes et, pour déterminer les foncteurs associés, tenter de comprendre comment varient leurs résolutions.

Les deux premiers exemples concernent le schéma $H_{6,3}$. Ce schéma contient une composante dont la courbe générale $C$ est ACM (arithmétiquement de Cohen-Macaulay c'est-à-dire dont le module de Rao est nul).

Il contient aussi deux autres schémas $H_{\gamma,\rho}$ qui sont tous deux formés de courbes de la classe de liaison de la réunion de deux droites disjointes (i.e. les courbes dont le module de Rao est égal à $k = R/(X,Y,Z,T)$ en un unique degré). Le premier est le schéma $H_1$ dont la courbe générale $C_1$ est une courbe de bidegré $(4,2)$ sur une quadrique, de module de Rao $k(-2)$ (le module égal à $k$ mais concentré en degré 2). Le deuxième est le schéma $H_2$ qui a pour courbe générale $C_2$ la réunion d'une quartique plane et de deux droites qui la coupent chacune en un point, avec comme module de Rao $k(-1)$.

Il y a une famille $\mathcal{C}_1$, à spécialité constante, paramétrée par un anneau de valuation discrète d'uniformisante $a$ qui joint $C$ et $C_1$. Cette famille admet la résolution "de type N" (cf. [MDP1] VII 2.6) suivante :

$$0 \to R_A(-4)^3 \to [R_A(-3)^4 \oplus R_A(-2) \xrightarrow{d_1} R_A(-2)] \to I_{\mathcal{C}_2} \to 0$$

([1]) La première approche de ce type de questions, semble avoir été effectuée, dans ce cas particulier de la spécialité constante, par Ballico et Bolondi, cf. [BB].

avec $d_1 = (X,Y,Z,T,a)$ (on note $[A \xrightarrow{u} B]$ le noyau de $u$). On voit aussitôt que pour $a$ inversible, c'est-à-dire au point générique de $\operatorname{Spec} A$, le facteur $R_A(-2)$ se simplifie, donnant la courbe ACM $C$. Dans ce cas, la variation du module de Rao est décrite par le module global $H^1_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1} = M_A = \operatorname{Coker} d_1 = R_A/(a,X,Y,Z,T)(-2)$.

Il y a aussi une famille $\mathcal{C}_2$, à postulation constante, qui joint $C$ et $C_2$. Cette fois, la famille admet la résolution "de type $E$" suivante (avec le même $d_1$) :

$$0 \to R_A(-5) \xrightarrow{{}^t d_1} R_A(-4)^4 \oplus R_A(-5) \to R_A(-3)^4 \oplus R_A(-4) \to I_{\mathcal{C}_2} \to 0$$

(cf. [MDP1] VII 2.1) et on voit, là encore, la simplification du terme $R_A(-5)$ au point générique.

Cependant, comme cette famille vérifie $M_A = H^1_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}_2} = 0$ alors que certaines courbes de la famille sont dans la classe de deux droites, donc ont un module de Rao non nul, il est clair que la variation du module de Rao ne peut être décrite par le module $M_A$.

Dans les deux exemples précédents la famille $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) admet une résolution à trois termes, de type $N$ (resp. $E$)(2) et le passage de la courbe spéciale à la courbe générique correspond à une simplification évidente de la résolution. L'exemple suivant montre que les choses peuvent être plus complexes lorsque la famille n'est ni à spécialité, ni à postulation constante.

Considérons le schéma $H_{4,0}$. Il possède deux composantes, toutes deux de dimension 16, l'une $H_1$ dont la courbe générale $C_1$ est une courbe de bidegré $(3,1)$ sur une quadrique, de module de Rao $k(-1)$, l'autre $H_2$ dont la courbe générale $C_2$ est réunion disjointe d'une cubique plane et d'une droite et a un module de Rao du type de $R/(X,Y,Z,T^3)$ de dimensions $1,1,1$, en degrés $0,1,2$.(3) Voici les résolutions de type $E$ de ces courbes :

$$0 \to R(-5) \to R(-4)^4 \to R(-2) \oplus R(-3)^3 \to I_{C_1} \to 0$$

$$0 \to R(-6) \to R(-3) \oplus R(-5)^3 \to R(-2)^2 \oplus R(-4)^2 \to I_{C_2} \to 0.$$

Bien que les composantes $H_1$ et $H_2$ vérifient les conditions nécessaires sur la cohomologie et le module de Rao pour que $H_2 \cap \overline{H_1}$ soit non vide, il n'est nullement évident, au vu de ces résolutions, pas plus d'ailleurs qu'avec celles de type $N$, de dire s'il peut exister une famille de courbes de point générique dans $H_1$ et de point spécial dans $H_2$. En particulier, à l'inverse des exemples ci-dessus, aucune simplification n'est apparente. Pourtant, nous verrons au §5 qu'il existe bien une telle famille.

On comprend un peu mieux ce phénomène si on note qu'il y a dans l'idéal de $C_2$ une équation de degré 2 de plus que dans celui de $C_1$ et si on supprime cette équation en **désaturant** l'idéal $I_{C_2}$. Par exemple, si $C_2$ est réunion de $(X,Y)$ et de $(Z,T^3)$ (4), son idéal est $(XZ, YZ, XT^3, YT^3)$ et, si on remplace $YZ$ par les équations $XYZ, Y^2Z, YZ^2, YZT$,

---

(2) mais pas l'inverse !

(3) On notera que $k(-1)$ est un sous-quotient de ce module.

(4) Cet exemple est choisi parce que le calcul est facile, mais les courbes de $H_2$ réunions disjointes d'une cubique et d'une droite ne sont pas dans l'adhérence de $H_1$. Il faut utiliser des structures multiples, cf. 5.22, mais le calcul de la résolution du désaturé est identique.

ce qui ne change pas $C_2$, on obtient un idéal $J$ non saturé dont la résolution a **quatre** termes est :

$$0 \to R(-6) \to R(-5)^4 \oplus R(-6) \to R(-4)^6 \oplus R(-5)^3 \to R(-2) \oplus R(-3)^3 \oplus R(-4)^2 \to J \to 0$$

et là, on voit, après simplifications d'un 6, de trois 5 et de deux 4 apparaître les chiffres de la résolution de $I_{C_1}$ dans celle de $J$ (bien entendu, cf. la note ([4]), ce calcul ne prouve pas l'existence d'une famille mais il donne un indice numérique favorable).

L'idée fondamentale que nous voulons éclairer par cet exemple c'est qu'on ne saurait comprendre les familles générales de courbes (celles qui ne sont ni à spécialité, ni à postulation constante) si l'on ne tolère pas cette opération de désaturation (cf. 2.12), avec comme conséquence inéluctable l'apparition de résolutions à quatre termes des idéaux.

À cet égard, nous définissons ci-dessous des résolutions de type $E$ "cotriadiques" du faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$, cf. 3.1. Il s'agit de résolutions de la forme $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \to 0$ où $\mathcal{E}$ est localement libre et défini par une suite exacte $0 \to \mathcal{L}_5 \to \mathcal{L}_4 \to \mathcal{L}_3 \to \mathcal{E} \to 0$ avec $\mathcal{F}$ et les $\mathcal{L}_i$ dissociés (i.e., dans le cas d'un anneau local, somme directe finie de faisceaux inversibles). Nous utilisons aussi la notion duale de résolution de type $N$ "triadique" de la forme : $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \to 0$, où $\mathcal{N}$ est défini par une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$ avec $\mathcal{P}$ et les $\mathcal{L}_i$ dissociés. Par rapport à une résolution de type $E$ (resp. $N$) sur un corps, on notera la présence du terme supplémentaire $\mathcal{L}_5$ (resp. $\mathcal{L}_{-1}$).

Nous montrons dans ce travail que si $\mathcal{C}$ est une famille de courbes sur un anneau local $A$ il existe effectivement des résolutions de type $E$ et $N$ triadiques (cf. 3.1). L'intérêt de ces résolutions est de répondre à la question de la nature du foncteur $V_{\mathcal{C}}$ défini ci-dessus et qui décrit la variation du module de Rao. On montre en effet par un petit calcul cohomologique que, si $L_\bullet = (L_1 \to L_0 \to L_{-1})$ est le complexe de $R_A$-modules gradués associé à une résolution de type $N$, on a $V_{\mathcal{C}}(Q) = h_0(L_\bullet \otimes Q)$, où $h_0$ désigne l'homologie en degré 0 du complexe. On notera que c'est aussi cette homologie qui apparaît dans les théorèmes de cohomologie et changement de base.

Le complexe $L_\bullet$ ci-dessus est appelé une **triade**. C'est cette notion qui généralise celle de module de Rao et l'application $\Psi_A$ consiste donc à remplacer une famille de courbes, c'est-à-dire, via les résolutions de type $N$, un complexe à quatre termes, par une triade, c'est-à-dire un complexe à trois termes.

Examinons maintenant le plan de ce travail et les résultats obtenus.

Le paragraphe 1 est consacré à mettre en place et à étudier la notion de triade.

Une triade est un complexe de $R_A$-modules gradués $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ avec notamment des hypothèses de finitude sur ses groupes d'homologie, cf. 1.10 pour une définition précise. Un cas particulier important est celui des triades majeures (cf. 1.13).

On définit le foncteur $V$ associé à une triade (cf. 1.3) : c'est le foncteur $h_0(L_\bullet \otimes \bullet)$ (cf. aussi 1.36).

On définit ensuite un pseudo-isomorphisme entre deux triades (en abrégé un *psi*, cf. 1.7) : c'est un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme sur les foncteurs $V$ et un monomorphisme sur les foncteurs $h_{-1}(L_\bullet \otimes \bullet)$ et on dit que deux triades sont pseudo-isomorphes si elles sont reliées par une chaîne de *psi*. On établit le lemme 1.19 qui permet de se limiter à des chaînes à deux maillons (à la manière de Verdier, cf. [V]).

Deux triades pseudo-isomorphes définissent le même foncteur, mais la réciproque est fausse (cf. 1.35.c). Si on est sur un anneau de valuation discrète toute triade est pseudo-isomorphe à une unique triade majeure dite élémentaire (cf. 1.32), caractérisée par le fait que son conoyau $h_{-1}(L_\bullet)$ est de torsion.

On définit en 1.26 la notion de triade duale (définie à *psi* près).

Le paragraphe 2 est consacré à l'étude des faisceaux triadiques. Il s'agit (cf. 2.3) des faisceaux $\mathcal{N}$ qui s'insèrent dans une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$, avec les $\mathcal{L}_i$ dissociés. Il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des triades majeures, à homotopie près, et celle des faisceaux triadiques, la correspondance envoyant une triade $L_\bullet$ sur le faisceau $\mathcal{N}$ associé à son noyau $N = h_1(L_\bullet)$. On montre (là encore à l'aide d'un lemme de Verdier 2.11), que les *psi* de triades et ceux de faisceaux (définis comme dans [HMDP1]) se correspondent (cf. 2.14). Dans le cas d'un anneau de valuation discrète, on montre que les triades élémentaires correspondent aux faisceaux extravertis minimaux de [HMDP1], cf. 2.15.

Le paragraphe 3 fait le lien entre familles de courbes, triades et faisceaux triadiques. On commence par montrer, par deux méthodes (l'une par désaturation et liaison l'autre par troncature à partir du complexe $\mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$), l'existence de résolutions de type $N$ triadiques (i.e. dont le faisceau $\mathcal{N}$ est triadique). On définit ensuite (cf. 3.6) une triade de Rao associée à une famille de courbes comme la triade associée au faisceau $\mathcal{N}$ d'une résolution de type $N$ triadique de $\mathcal{C}$. Cette triade est bien définie à *psi* près. Le foncteur associé n'est autre que le foncteur de Rao $V_\mathcal{C}$ défini ci-dessus.

On obtient ainsi la flèche $\Psi_A$ évoquée plus haut qui associe à une famille de courbes $\mathcal{C}$ la classe de triades de ses triades de Rao $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ (pour la relation de pseudo-isomorphisme) et on prouve, à l'aide de [HMDP1], le résultat suivant :

**Théorème 3.9.** *(Théorème de Rao pour les triades) On suppose $A$ local à corps résiduel infini. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux familles plates de courbes paramétrées par $A$ et soient $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ des triades de Rao de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Alors, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dans la même classe de biliaison si et seulement si les triades $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont pseudo-isomorphes, à décalage près (i.e. s'il existe un entier $h$ tel que l'on ait $\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C}')(h)$).*

Puis, grâce aux résultats de [HMDP2] exprimés en termes de triades, on montre la généralisation de l'assertion de surjectivité (toujours à décalage près) du théorème de Rao (i.e. de l'application $\Psi_A$) :

**Théorème 3.10.** *On suppose $A$ local à corps résiduel infini. Soit $L_\bullet$ une triade. Il existe une famille de courbes $\mathcal{C}$ telle que la triade de Rao de $\mathcal{C}$ soit pseudo-isomorphe à $L_\bullet$, à décalage près.*

Plus précisément, le théorème suivant donne exactement l'image de $\Psi_A$, i.e. les décalages possibles. Il contient aussi la généralisation du théorème de Lazarsfeld-Rao :

**Théorème 3.11.** *On suppose $A$ local à corps résiduel infini. Soit $L_\bullet$ une triade, $\mathcal{T}$ sa classe de pseudo-isomorphisme, $\mathcal{N}$ un faisceau triadique associé et soit $\mathcal{N}_0$ le faisceau*

*extraverti minimal (unique) de la classe de pseudo-isomorphisme de $\mathcal{N}$ (cf. [HMDP1] 2.14). Soit $q = q_{\mathcal{N}_0}$ la fonction $q$ de $\mathcal{N}_0$ (cf. [HMDP2] 2.4) et soit $h_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} nq(n) + \deg \mathcal{N}_0$.*
*1) Il existe une famille de courbes $\mathcal{C}_0$ et une résolution $0 \to \mathcal{P}_0 \to \mathcal{N}_0 \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}_0}(h_0) \to 0$ avec $\mathcal{P}_0$ dissocié. La classe de triade associée à $\mathcal{C}_0$ est égale à $\mathcal{T}(-h_0)$.*
*2) Si $\mathcal{C}_1$ est une famille de courbes telle que $\mathcal{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{T}(-h)$, on a $h \geq h_0$. Si $d$ et $g$ (resp. $d_0$ et $g_0$) sont respectivement le degré et le genre de $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_0$) on a $d \geq d_0$ et $g \geq g_0$.*
*3) Réciproquement, pour tout $h \geq h_0$ il existe une famille de courbes $\mathcal{C}_1$ avec $\mathcal{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{T}(-h)$.*
*4) Si de plus on a $h = h_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_0$ sont jointes par une déformation à cohomologie uniforme (cf. [HMDP2] 2.8) et triade constante.*
*On dit que $\mathcal{C}_0$ est une* **famille minimale** *de courbes.*
*Les autres familles de courbes de la classe de biliaison s'obtiennent à partir de $\mathcal{C}_0$ par des biliaisons élémentaires suivies d'une déformation à cohomologie uniforme et triade constante.*

Enfin, on a le lien entre dualité et liaison impaire :

**Théorème 3.13.** *On suppose $A$ local à corps résiduel infini. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux familles plates de courbes paramétrées par $A$, et soient $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ des triades de Rao de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Alors, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont liées par un nombre impair de liaisons élémentaires si et seulement si les triades $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont duales à psi près et à décalage près, i.e. s'il existe un entier $h$ tel que $L_\bullet(h)$ soit pseudo-isomorphe à une triade duale de $L'_\bullet$.*

Le paragraphe 4 établit un dictionnaire reliant courbes, faisceaux et triades. On y caractérise les triades dites modulaires (celles qui sont définies par un $R_A$-module) et on montre qu'elles correspondent aux familles de courbes à spécialité constante. On définit aussi la notion duale de triade représentable qui correspond aux familles de courbes à postulation constante.

Le paragraphe 5 est essentiellement constitué d'exemples. On y reprend, comme fil conducteur, le troisième des exemples étudiés ci-dessus : les courbes de degré 4 et genre 0.

On montre (cf. 5.8) que si on a une triade sur un anneau de valuation discrète, la valeur du foncteur $V$ au point générique est une déformation plate d'un sous-quotient de la valeur de $V$ au point fermé. Il en résulte (cf. 5.9) qu'on a ce même résultat pour les modules de Rao aux points générique et fermé d'une famille de courbes.

On montre, réciproquement, (cf. 5.15) que si on a deux modules gradués $M$ et $M_0$ de longueur finie tels que $M$ soit un sous-quotient de $M_0$ il existe une triade dite triviale, paramétrée par un anneau de valuation discrète, dont les valeurs du foncteur associé au point fermé (resp. générique) sont $M_0$ (resp. $M$). Ce résultat permet de construire de nombreux exemples de triades et de déterminer les familles minimales associées grâce à l'algorithme développé dans [HMDP2] §3 (cf. 5.17, 5.18).

Cependant on constate dans de nombreux cas (et notamment celui qui est censé mener à une famille $(4, 0)$) que cette construction n'est pas optimale, au sens où elle ne donne pas des familles de degré assez petit. On reprend donc la construction précédente avec plus de soin en montrant comment construire de "meilleures" triades. Cette méthode conduit en particulier à la construction d'une famille de courbes de $H_{4,0}$ et à la preuve de la connexité du schéma de Hilbert $H_{4,0}$ (cf. 5.21).

Plus généralement, les applications à l'étude du schéma de Hilbert des courbes de la notion de triade semblent prometteuses, car elles donnent un moyen systématique de construire des familles de courbes dans tous les cas et en particulier le cas non trivial où ces familles ne sont ni à postulation, ni à spécialité constante. Ces constructions jouent notamment un rôle essentiel dans les problèmes de connexité, cf. par exemple [AA].

## 0. Notations et préliminaires.

Si $A$ est un anneau noethérien, on note $\mathbf{P}^3_A$ l'espace projectif de dimension 3 sur $A$ et $R_A$ l'anneau $A[X,Y,Z,T]$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}^3_A$ on note $H^i\mathcal{F}$ le $A$-module $H^i(\mathbf{P}^3_A,\mathcal{F})$. On pose $\Gamma_*\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \Gamma\mathcal{F}(n)$ et $H^i_*\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^i\mathcal{F}(n)$ pour $i \geq 0$. Lorsque $A = k$ est un corps on pose $R = R_k$, $\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^3_k$ et on note $h^i\mathcal{F}$ la dimension de $H^i\mathcal{F}$.

*a) Modules gradués.*

Soit $A$ un anneau noethérien. On désigne par $\mathrm{Mod}_A$ la catégorie des $A$-modules et par $\mathrm{Gr}_{R_A}$ la catégorie des $R_A$-modules gradués, avec comme morphismes les homomorphismes de degré zéro. Ce sont des catégories abéliennes.

Si $M$ est un $R_A$-module gradué le module décalé $M(d)$ est le module $M$ muni de la graduation définie par $M(d)_n = M_{n+d}$.

Si $M$ est un $R_A$-module gradué et $r$ un entier, $M_{>r} = \bigoplus_{n>r} M_n$ est un sous-module gradué de $M$. Le quotient $M/M_{>r}$ est noté $M_{\leq r}$. C'est aussi un $R_A$-module gradué, dont les composantes de degré $\leq r$ sont isomorphes à celles de $M$ et qui est nul en degré $> r$. Les foncteurs $M \mapsto M_{>r}$ et $M \mapsto M_{\leq r}$ de $\mathrm{Gr}_{R_A}$ dans elle-même sont appelés foncteurs de troncature et ils sont exacts.

Un $R_A$-**module dissocié** est un module de la forme

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i \otimes_A R_A(-n_i),$$

où les $n_i$ sont des entiers et les $M_i$ des $A$-modules projectifs de type fini. Si $A$ est local tout module dissocié est libre. On vérifie que les modules dissociés sont des objets projectifs dans la catégorie $\mathrm{Gr}_{R_A}$.

De même, on introduit la notion de **faisceau dissocié** sur $\mathbf{P}^3_A$ : c'est un faisceau de la forme

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A}(-n_i)$$

où les $n_i$ sont des entiers et les $M_i$ des $A$-modules projectifs de type fini. Si le module $F$ est dissocié le faisceau associé $\widetilde{F}$ l'est aussi ; si le faisceau $\mathcal{F}$ est dissocié le module $H^0_*\mathcal{F}$ l'est aussi.

Si $M$ est un $R_A$-module gradué et $Q$ un $A$-module, on a une structure de $R_A$-module gradué sur $M \otimes_A Q$ en posant $(M \otimes_A Q)_n = M_n \otimes_A Q$. Sous ces mêmes hypothèses on pose

$$\mathrm{Homgr}_A(M,Q) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_A(M_{-n},Q)$$

et on définit une structure de $R_A$-module gradué sur $\mathrm{Homgr}_A(M,Q)$ en posant $(\lambda.f)(x) = f(\lambda.x)$.

Si $M$ et $N$ sont des $R_A$-modules gradués et $d$ un entier on note $\mathrm{Hom}^d_{R_A}(M,N)$ l'espace des homomorphismes de $R_A$-modules, homogènes de degré $d$ et on pose

$$\mathrm{Homgr}_{R_A}(M,N) = \bigoplus_{d\in\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}^d_{R_A}(M,N).$$

*b) Modules duaux.*

Nous rappelons ici les deux notions de modules duaux d'un $R_A$-module gradué $M$, les modules $M^\vee$ et $M^*$ qu'on prendra garde à ne pas confondre.

Si $M$ est un $R_A$-module gradué, on définit son dual (sur $R_A$) comme le module $M^\vee = \mathrm{Homgr}_{R_A}(M,R_A)$. Si $M$ est un $R_A$-module de type fini, $M^\vee$ est simplement le module $\mathrm{Hom}_{R_A}(M,R_A)$. Si $M$ est libre gradué, $M = \bigoplus_{i=1}^r R_A(-n_i)$, on a $M^\vee = \bigoplus_{i=1}^r R_A(n_i)$.

Si $M$ est un $R_A$-module gradué on définit le module dual (sur $A$) $M^*$ de $M$ comme $\mathrm{Homgr}_A(M,A)$. On a donc $M^* = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}(M_n)^*$, avec $(M_n)^* = \mathrm{Hom}_A(M_n,A)$ ; ce module est gradué par $(M^*)_n = \mathrm{Hom}_A(M_{-n},A)$ et sa structure de $R_A$-module définie par $\lambda f(x) = f(\lambda x)$.

Un cas particulier de module dual est le module $R_A^*$ qui est gradué en degrés $\leq 0$. Précisément, $({R_A}^*)_{-n}$ est un $A$-module libre de dimension $\binom{n+3}{3}$. On notera les formules $(R_A(d))^* = R_A^*(-d)$ et $(M_{\leq r})^* = (M^*)_{\geq -r}$.

L'application $M \mapsto M^*$ définit un foncteur contravariant de la catégorie $\mathrm{Gr}_{R_A}$ dans elle-même. De plus, si l'on se restreint aux $R_A$-modules gradués dont les composantes de tous degrés sont des $A$-modules projectifs de type fini, le foncteur $M \mapsto M^*$ est exact et involutif.

La proposition suivante précise les liens entre les modules duaux et la cohomologie sur l'espace projectif $\mathbf{P}^3_A$ dans le cas dissocié :

**Proposition 0.1.**
*1) Soit $L$ un $R_A$-module dissocié, $\mathcal{L}$ le faisceau sur $\mathbf{P}^3_A$ associé. On a $H^0_*(\mathbf{P}^3_A,\mathcal{L}) = L$.*
*2) Soit $\mathcal{L}$ un faisceau dissocié et soit $L = H^0_*(\mathbf{P}^3_A,\mathcal{L})$. On a $H^0_*(\mathbf{P}^3_A,\mathcal{L}^\vee) = L^\vee$.*

*c) Foncteurs.*

On considère ici, pour l'essentiel, des foncteurs covariants de la catégorie $Mod_A$ dans elle-même ou dans la catégorie $\mathrm{Gr}_{R_A}$. Un tel foncteur $V : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Gr}_{R_A}$ est une somme directe de foncteurs $V_n : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$ et est muni d'une opération graduée de $R_A$ (c'est-à-dire, pour tout $A$-module $Q$, de morphismes $R_A \times V(Q) \to V(Q)$ homogènes de degré 0 et fonctoriels en $Q$). Si $V$ est un tel foncteur, le foncteur décalé $V(h)$ est défini par la formule $[V(h)(Q)]_n = V(Q)_{n+h}$.

Les foncteurs considérés seront toujours supposés $A$-linéaires.

Nous utiliserons la théorie des foncteurs cohérents due à Auslander (cf. [H]). Un foncteur $A$-linéaire $V : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$ est dit **cohérent** s'il est conoyau d'un morphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_A(M,.) \to \mathrm{Hom}_A(N,.)$ avec $M,N$ deux $A$-modules de type fini.

Pour les foncteurs cohérents on a une théorie de la dualité : si $V$ s'écrit comme conoyau d'un morphisme $\mathrm{Hom}_A(M, .) \to \mathrm{Hom}_A(N, .)$ on définit le foncteur dual $V^*$ comme le noyau du morphisme $N \otimes_A . \to M \otimes_A .$. C'est un foncteur cohérent et l'opération $^*$ est involutive : on a $V^{**} = V$.

Si $V = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} V_d : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Gr}_{R_A}$ est un foncteur tel que, pour tout degré $d$, $V_d$ soit un foncteur cohérent, on définit le dual de $V$ par la formule $V^* = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} (V_{-d})^*$. Ce foncteur est à valeurs dans $\mathrm{Gr}_{R_A}$.

**Proposition 0.2.**
*1) Avec les notations précédentes, si $V$ est exact à droite (c'est-à-dire de la forme $V(A) \otimes_A .$), on a un isomorphisme de $R_A$-modules gradués : $V^*(A) \simeq (V(A))^*$.*
*2) Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent localement libre sur $\mathbf{P}^r_A$ on a un isomorphisme de $R_A$-modules gradués : $(H^r_* \mathcal{F})^* \simeq H^0_* \mathcal{F}^\vee(-r-1)$.*
*3) Soit $\mathcal{L}$ un faisceau dissocié sur $\mathbf{P}^3_A$ et soit $L = H^0_*(\mathbf{P}^3_A, \mathcal{L})$. On a un isomorphisme de $R_A$-modules gradués : $H^3_*(\mathbf{P}^3_A, \mathcal{L}) \simeq (L^\vee(-4))^*$.*

**Démonstration.** 1) Posons $M = V(A)$. On a donc $V_n(A) = M_n$. Par définition on a $(V^*)_n = (V_{-n})^*$, donc $(V^*)_n(A) = \mathrm{Hom}_A(M_{-n}, A)$, cf. [H] 4.1. On en déduit l'isomorphisme cherché.

2) On applique le point 1) au foncteur $H^r_*(\mathcal{F} \otimes_A .)$ qui est exact à droite et la conclusion vient de [H] 7.6.

3) résulte de 2) et de 0.1.2.

*d) Dualité de Grothendieck et graduation.*

Dans ce paragraphe nous donnons une variante graduée du théorème de dualité de Grothendieck. Pour tout ce qui concerne les catégories dérivées on renvoie à [RD].

Posons $X = \mathbf{P}^r_A$ et $Y = \mathrm{Spec}\, A$ et soit $f : X \to Y$ la projection canonique. Soit $\mathrm{Mod}_X$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules et $\mathcal{D}(X)$ la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}_X$. On note $\mathcal{D}^+(X)$ (resp. $\mathcal{D}^-(X)$) la sous-catégorie correspondant aux complexes bornés inférieurement (resp. supérieurement) et $\mathcal{D}_{qc}(X)$ la sous-catégorie des complexes à cohomologie quasi-cohérente. De même on note $\mathcal{D}(A), \mathcal{D}^+(A), ...$ et $\mathcal{D}(R_A), ...$ les catégories dérivées de $\mathrm{Mod}_A$ et $\mathrm{Gr}_{R_A}$.

Comme $\mathrm{Mod}_X$ a assez d'injectifs, le foncteur $\Gamma_*$ de $\mathrm{Mod}_X$ dans $\mathrm{Gr}_{R_A}$ admet un foncteur dérivé $\mathbf{R}\Gamma_* : \mathcal{D}^+(X) \to \mathcal{D}^+(R_A)$. Si $\mathcal{J}$ est un objet injectif de $\mathrm{Mod}_X$ il en est de même de $\mathcal{J}(n)$ et on en déduit la formule $(\mathbf{R}\Gamma_* \mathcal{F})_n = \mathbf{R}\Gamma \mathcal{F}(n)$.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G} \in \mathrm{Mod}_X$. On pose

$$\mathrm{Hom}_{X,*}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}(n)) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}(-n), \mathcal{G}).$$

On peut calculer le foncteur dérivé de $\mathrm{Hom}_{X,*}(.\,,.)$ en utilisant, par exemple, des résolutions injectives de la seconde variable et on obtient

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{X,*}(.\,,.) : \mathcal{D}^-(X) \times \mathcal{D}^+(X) \to \mathcal{D}^+(R_A).$$

Ce foncteur est compatible avec la graduation et redonne donc le foncteur $\mathbf{R}\mathrm{Hom}$ usuel en degré $n$.

On considère aussi le foncteur défini au paragraphe *a)*

$$\operatorname{Homgr}_A(\,.\,,\,.\,) : \operatorname{Gr}_{R_A} \times \operatorname{Mod}_A \to \operatorname{Gr}_{R_A}$$

et son dérivé $\mathbf{R}\operatorname{Homgr}_A(\,.\,,\,.\,)$. On a un morphisme de foncteurs

$$\operatorname{Hom}_{X,*}(\,.\,,\,.\,) \to \operatorname{Homgr}_A(\Gamma_*(\,.\,)\,,\Gamma(\,.\,))$$

et, au niveau des catégories dérivées, on a le lemme suivant :

**Lemme 0.3.** *Soient $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^-(X)$ et $\mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{D}^+(X)$. Il existe un morphisme fonctoriel*

$$\varphi : \mathbf{R}\operatorname{Hom}_{X,*}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \to \mathbf{R}\operatorname{Homgr}_A(\mathbf{R}\Gamma_*(\mathcal{F}^\bullet), \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{G}^\bullet)).$$

**Démonstration.** On notera que nous avons utilisé $\mathbf{R}\Gamma_*$ pour $\mathcal{F}^\bullet$ mais $\mathbf{R}\Gamma$ pour $\mathcal{G}^\bullet$. La preuve est analogue à celle de [RD] II, 5.5, p. 103. On représente $\mathcal{F}^\bullet$ par un complexe de faisceaux acycliques pour $\Gamma_*$ (par exemple des faisceaux flasques) et $\mathcal{G}^\bullet$ par un complexe de faisceaux injectifs. Comme $\mathcal{G}^\bullet$ est injectif on a $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_{X,*}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = \operatorname{Hom}_{X,*}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)$ et ce dernier complexe s'envoie dans $\operatorname{Homgr}_A(\Gamma_*\mathcal{F}^\bullet, \Gamma\mathcal{G}^\bullet)$ qui n'est autre que $\operatorname{Homgr}_A(\mathbf{R}\Gamma_*(\mathcal{F}^\bullet), \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{G}^\bullet))$ car $\mathcal{F}^\bullet$ est acyclique et $\mathcal{G}^\bullet$ injectif. En composant avec le morphisme canonique $\operatorname{Homgr} \to \mathbf{R}\operatorname{Homgr}$ on obtient $\varphi$.

On peut maintenant définir le morphisme de dualité. Soit $\omega = \Omega^r_{X/Y} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A}(-r-1)$ le faisceau dualisant relatif. On pose, pour $G^\bullet \in \mathcal{D}^+(A)$, $f^\sharp(G^\bullet) = f^*(G^\bullet) \otimes \omega[r]$, cf. [RD] p. 145. Pour $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^-(X)$ et $G^\bullet \in \mathcal{D}^+(A)$ on définit le morphisme de dualité

$$\theta : \mathbf{R}\operatorname{Hom}_{X,*}(\mathcal{F}^\bullet, f^\sharp G^\bullet) \to \mathbf{R}\operatorname{Homgr}_A(\mathbf{R}\Gamma_*(\mathcal{F}^\bullet), G^\bullet)$$

comme composé du morphisme $\varphi$ défini en 0.3 et du morphisme trace $t : \mathbf{R}\Gamma f^\sharp(G^\bullet) \to G^\bullet$, cf. [RD] III, 4.3, p. 155. On a alors le théorème suivant :

**Théorème 0.4.** *Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^-_{qc}(X)$ et tout $G^\bullet \in \mathcal{D}^+(A)$ le morphisme $\theta$ est un isomorphisme.*

**Démonstration.** Le théorème résulte de [RD] III, 5.1, p. 161 appliqué en chaque degré.

**Corollaire 0.5.** *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre de type fini sur $\mathbf{P}^3_A$. On a un isomorphisme fonctoriel dans $\mathcal{D}^+(R_A)$ :*

$$\theta : \mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{F}^\vee(-4)\,[3] \simeq \mathbf{R}\operatorname{Homgr}_A(\mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{F}, A).$$

**Démonstration.** On prend $G^\bullet = A$. On a alors $f^\sharp A = \omega\,[3] = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-4)\,[3]$ par définition de $f^\sharp$. Par ailleurs, comme $\mathcal{F}$ est localement libre de type fini on a $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \Gamma(\mathcal{F}^\vee \otimes \mathcal{G})$, d'où le résultat.

*e) Courbes.*

Sur un corps $k$ on appelle courbe un sous-schéma de $\mathbf{P}^3_k$ de dimension 1, sans composante ponctuelle (immergée ou non), c'est-à-dire localement de Cohen-Macaulay. Cette notion est stable par extension du corps de base, cf. [M], remarque p. 182.

Si $T$ est un schéma, une famille de courbes $\mathcal{C}$ sur $T$ (on dira simplement une courbe de $\mathbf{P}^3_T$), est un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^3_T$, plat sur $T$, et dont les fibres sont des courbes au sens précédent. On note $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ le faisceau structural de $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ le faisceau d'idéaux qui définit $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{P}^3_T$ et $I_{\mathcal{C}}$ son idéal saturé : $I_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} H^0\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(n)$.

## 1. La définition des triades.

On reprend les notations du paragraphe 0 : $A$ désigne un anneau noethérien et $R_A$ l'anneau de polynômes $A[X,Y,Z,T]$.

*a) Complexes et foncteurs associés.*

Nous considérons dans toute la suite des complexes $L_{\bullet} = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ dans la catégorie $\mathrm{Gr}_{R_A}$. Le groupe d'homologie d'indice $i$ d'un tel complexe est noté $h_i(L_{\bullet})$. C'est un $R_A$-module gradué.

**Définition 1.1.** *Soit $L_{\bullet} = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ un complexe. Les $R_A$-modules gradués $N = h_1(L_{\bullet})$, $H = h_0(L_{\bullet})$, $C = h_{-1}(L_{\bullet})$ sont appelés respectivement* **noyau, cœur** *et* **conoyau** *du complexe.*
*Le complexe* **dual** *$L^*_{\bullet}$ est le complexe $L^*_{-1} \xrightarrow{d_0^*} L^*_0 \xrightarrow{d_1^*} L^*_1$, cf. § 0. Si $u : L_{\bullet} \to L'_{\bullet}$ est un morphisme on note $u^*$ le morphisme induit sur les complexes duaux.*
*Le complexe* **décalé** *$L_{\bullet}(n)$ est le complexe défini par les modules décalés, cf. § 0 :*

$$L_1(n) \xrightarrow{d_1(n)} L_0(n) \xrightarrow{d_0(n)} L_{-1}(n).$$

*Les complexes* **tronqués** *$L_{\bullet \le r}$ et $L_{\bullet > s}$ sont les complexes obtenus en tronquant les modules $L_i$, cf. § 0.*

On notera que la flèche $d_0$ se factorise par $E = \operatorname{Coker} d_1$ en une flèche $d$. On a ainsi une suite exacte

$$0 \to H \to E \xrightarrow{d} L_{-1} \to C \to 0,$$

qui fournit un élément de $\operatorname{Ext}^2_{R_A}(C,H)$.

**Définition 1.2.** *Soit $L_{\bullet} = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ un complexe de $R_A$-modules gradués. On pose $L_i = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} L_{i,n}$. On dit que $L_{\bullet}$ est un* **complexe adéquat** *si les $L_{i,n}$ sont des $A$-modules plats et de type fini pour tout $i$ et tout $n$ (donc projectifs).*

On notera que l'ensemble des complexes adéquats est stable par les opérations de troncature, de somme directe et de dualité et que la dualité est involutive.

**Définition 1.3.** *Soit $L_{\bullet} = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ un complexe adéquat. Pour $i = 1, 0, -1$ on considère le foncteur $h_i(L_{\bullet} \otimes_A .)$ de $\mathrm{Mod}_A$ dans $\mathrm{Gr}_{R_A}$ qui à un $A$-module $Q$ associe $h_i(L_{\bullet} \otimes_A Q)$. On appelle* **foncteur associé** *à $L_{\bullet}$ et on note $V_{L_{\bullet}}$ le foncteur $h_0(L_{\bullet} \otimes_A .)$.*

Les foncteurs $h_1(L_{\bullet} \otimes_A .)$ et $h_{-1}(L_{\bullet} \otimes_A .)$ d'un complexe adéquat s'échangent par dualité au sens du paragraphe 0 *c)*, cf. [H] 4.3. Précisément $h_1((L^*_{\bullet})_n \otimes .)$ est dual de $h_{-1}((L_{\bullet})_{-n} \otimes_A .)$. De même on a $V_{(L^*_{\bullet})} = (V_{L_{\bullet}})^*$ avec renversement de la graduation.

Le lemme suivant est immédiat :

**Lemme 1.4.** *Soit* $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ *un complexe adéquat,* $E = \operatorname{Coker} d_1$, $d : E \to L_{-1}$ *la flèche déduite de* $d_1$ *(cf. ci-dessus),* $V$ *le foncteur associé. Alors, pour tout* $A$*-module* $Q$*, on a un isomorphisme fonctoriel en* $Q$ *:* $\operatorname{Ker}(d \otimes Q) \simeq V(Q)$.

**Lemme 1.5.** *Soient* $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ *un complexe adéquat,* $H$ *et* $C$ *le cœur et le conoyau de* $L_\bullet$*,* $V$ *le foncteur associé. Soit* $Q$ *un* $A$*-module quelconque. On a une suite exacte fonctorielle en* $Q$ *:*

$$\operatorname{Tor}_2^A(C, Q) \to H \otimes_A Q \to V(Q) \to \operatorname{Tor}_1^A(C, Q) \to 0.$$

**Démonstration.** (cf. aussi [H] 3.6) On pose $K = \operatorname{Im} d_0$ et $E = \operatorname{Coker} d_1$. On a les suites exactes $0 \to H \to E \to K \to 0$ et $0 \to K \to L_{-1} \to C \to 0$. En tensorisant par $Q$ on obtient les suites exactes

$$\operatorname{Tor}_1^A(K, Q) \xrightarrow{u} H \otimes_A Q \to E \otimes_A Q \to K \otimes_A Q \to 0$$

et, comme $L_{-1}$ est plat,

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^A(C, Q) \to K \otimes_A Q \to L_{-1} \otimes_A Q \to C \otimes_A Q \to 0.$$

On pose $M_Q = \operatorname{Coker} u$ et on applique le lemme du serpent au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M_Q & \to & E \otimes_A Q & \to & K \otimes_A Q & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \to & V(Q) & \to & E \otimes_A Q & \xrightarrow{d \otimes Q} & L_{-1} \otimes_A Q & & \end{array}$$

(en vertu de 1.4 le module $V(Q)$ est le noyau de $d \otimes Q$). Le résultat s'ensuit aisément en tenant compte de l'égalité $\operatorname{Tor}_1^A(K, Q) = \operatorname{Tor}_2^A(C, Q)$.

*b) Pseudo-isomorphismes.*

On rappelle qu'un quasi-isomorphisme de complexes (un *qis*) est un morphisme qui induit un isomorphisme sur les groupes d'homologie. Le résultat suivant précise l'effet d'un *qis* sur les foncteurs. Sa preuve est identique à celle de la dernière assertion de [AG] III 12.3 :

**Proposition 1.6.** *Soit* $u : L_\bullet \to L'_\bullet$ *un morphisme de complexes. On suppose que* $u$ *est un qis et que les modules* $L_i$ *et* $L'_i$ *sont plats sur* $A$*. Alors,* $u$ *induit un isomorphisme de foncteurs* $h_i(L_\bullet \otimes_A \bullet) \to h_i(L'_\bullet \otimes_A \bullet)$ *pour tout* $i$*.*

La notion de pseudo-isomorphisme, qui va jouer jouer un rôle essentiel dans ce qui suit, apparaît alors comme une forme affaiblie de celle de *qis* :

**Définition 1.7.** *Soit $u : L_\bullet \to L'_\bullet$ un morphisme de complexes adéquats. On dit que $u$ est un* **pseudo-isomorphisme** *(en abrégé un psi) s'il induit un isomorphisme de foncteurs : $h_0(L_\bullet \otimes_A \bullet) \to h_0(L'_\bullet \otimes_A \bullet)$ et un monomorphisme de foncteurs : $h_{-1}(L_\bullet \otimes_A \bullet) \to h_{-1}(L'_\bullet \otimes_A \bullet)$.*

Le résultat suivant est immédiat :

**Proposition 1.8.**
*a) Le composé de deux psi est un psi,*
*b) si $g \circ f$ et $g$ sont des psi, il en est de même de $f$,*
*c) un morphisme homotope à un psi est un psi,*
*d) si $u$ est un qis, $u$ est un psi.*

**Proposition 1.9.** *Soit $L_\bullet$ un complexe adéquat.*
*On suppose que les foncteurs $h_0(L_\bullet \otimes_A \bullet)$ et $h_{-1}(L_\bullet \otimes_A \bullet)$ sont bornés supérieurement, i.e. qu'on a $h_i(L_n \otimes_A \bullet) = 0$ pour $i = 0, -1$ et $n > r$. Alors, la projection $L_\bullet \to L_{\bullet \leq r}$ est un psi qui induit un isomorphisme sur les conoyaux et un épimorphisme sur les foncteurs $h_1$.*

**Démonstration.** La suite exacte de complexes $0 \to L_{\bullet > r} \to L_\bullet \xrightarrow{p} L_{\bullet \leq r} \to 0$ est scindée comme suite de $A$-modules, donc reste exacte quand on tensorise par un $A$-module $Q$. Comme l'homologie de $L_{\bullet > r} \otimes_A \bullet$ en degrés 0 et $-1$ est nulle, la suite d'homologie associée donne le résultat.

*c) Triades.*

**Définition 1.10.** *Soit $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ un complexe adéquat.*
*On dit que $L_\bullet$ est une* **triade** *si le noyau $N = h_1(L_\bullet)$ est un $R_A$-module de type fini et si le cœur $H = h_0(L_\bullet)$ et le conoyau $C = h_{-1}(L_\bullet)$ sont des $A$-modules de type fini.*

**Définition 1.11.** *Un morphisme (resp. un pseudo-isomorphisme) de triades n'est rien d'autre qu'un morphisme (resp. un pseudo-isomorphisme) de complexes. On dit que deux triades $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont équivalentes pour la relation de pseudo-isomorphisme (ou simplement sont pseudo-isomorphes) s'il existe une chaîne de psi qui les joint, dans laquelle les $L^{(i)}_\bullet$ sont des triades :*

$$\begin{tikzcd}
 & L^{(1)}_\bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dl] \arrow[dr] & & L^{(n)}_\bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
L_\bullet & & L^{(2)}_\bullet & & L^{(n-1)}_\bullet & & L'_\bullet
\end{tikzcd}$$

**Remarques 1.12.**
1) Nous verrons au paragraphe *j)* comment on peut donner une définition plus générale des triades et des *psi* dans le cas de complexes non nécessairement adéquats (i.e. sans hypothèses de platitude). Nous n'avons pas souhaité introduire ce raffinement au début de ce texte afin de ne pas trop l'alourdir. Toutes les triades envisagées dans cet article, à l'exception de celles du § *j)*, seront des complexes adéquats.
2) L'existence d'un pseudo-isomorphisme entre deux triades implique que les les foncteurs

associés sont isomorphes, mais la réciproque est inexacte comme on le verra plus loin (cf. 1.35 c).
3) Si $L_\bullet$ est une triade les foncteurs $h_{-1}(L_\bullet \otimes_A \bullet)$ et $h_0(L_\bullet \otimes_A \bullet)$ sont bornés (i.e., leurs composantes de degrés $\ll 0$ et $\gg 0$ sont nulles). Pour $h_{-1}$ cela résulte de la formule $h_{-1}(L_\bullet \otimes_A \bullet) = C \otimes_A \bullet$ et pour $h_0$ de 1.5. Le foncteur $h_1$ est borné inférieurement. En effet, pour $n \ll 0$ on a $N_n = H_n = C_n = 0$, de sorte que la suite $0 \to L_{1,n} \to L_{0,n} \to L_{-1,n} \to 0$ est exacte et, comme $L_{-1,n}$ est plat sur $A$, elle le reste par tensorisation par un $A$-module $Q$.

*d) Triades majeures.*

**Définition 1.13.** *On appelle* **triade majeure** *une triade* $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ *dans laquelle les* $L_i$ *sont des* $R_A$*-modules dissociés (donc libres si* $A$ *est local).*

Soit $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ un complexe. Rappelons qu'une résolution libre de $L_\bullet$ est un complexe $F_\bullet = (F_i)_{i \geq -1}$ de $R_A$-modules gradués libres, avec un *qis* $u : F_\bullet \to L_\bullet$. Il est clair qu'une telle résolution libre existe toujours (mais le complexe $F_\bullet$ a, en général, plus que trois termes).

**Proposition 1.14.** *Toute triade* $L_\bullet$ *admet une* **résolution majeure** *: il existe une triade majeure* $M_\bullet$ *et un psi* $u : M_\bullet \to L_\bullet$ *qui induit, de plus, un isomorphisme sur les conoyaux et un épimorphisme sur les foncteurs* $h_1$*.*

**Démonstration.** En vertu de [AG] III 12.3 il existe une résolution $F_\bullet$ de $L_\bullet$ avec les $F_i$ libres de type fini sur $R_A$. On obtient $M_\bullet$ en ne gardant que les termes de degrés $-1, 0, 1$ : $M_\bullet = (F_1 \to F_0 \to F_{-1})$.

**Remarque 1.15.** Attention, l'emploi du mot résolution en 1.14 est un abus de langage : une résolution majeure n'est pas une résolution projective du complexe au sens usuel car la flèche $u$ n'est pas un *qis* (elle n'est que surjective sur les noyaux). Cependant on passe aisément d'une notion à l'autre. Si on a une résolution libre de type fini on obtient une résolution majeure en tronquant comme ci-dessus. Inversement, si on a une résolution majeure on la prolonge en une résolution projective par le processus suivant : on a $u : M_\bullet \to L_\bullet$ qui induit un morphisme surjectif $\widehat{u} : N' \to N$ sur les noyaux. Soit $Q$ le noyau de $\widehat{u}$ et soit $\cdots \to F_3 \to F_2 \to Q \to 0$ une résolution libre de $Q$. Alors le complexe $F_\bullet = (\cdots \to F_3 \to F_2 \to M_1 \to M_0 \to M_{-1})$ donne une résolution projective de $L_\bullet$ avec un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} M_\bullet \arrow[r] \arrow[dr, "u"] & F_\bullet \arrow[d] \\ & L_\bullet \end{tikzcd}$$

On dit que $F'_\bullet = (\cdots \to F_3 \to F_2)$ est une queue pour la triade $M_\bullet$.

*e) Étude des pseudo-isomorphismes de triades.*

Nous donnons d'abord une caractérisation des *psi* :

**Proposition 1.16.** *Un morphisme de triades $f : L_\bullet \to L'_\bullet$ est un psi si et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes :*
*a) $f$ induit un isomorphisme $H \simeq H'$ sur les cœurs,*
*b) $f$ induit une injection $C \to C'$ des conoyaux et le quotient $D = C'/C$ est plat sur $A$.*
*Si de plus $f$ induit une surjection $N \to N'$ sur les noyaux, $f$ est un psi qui induit un épimorphisme sur les foncteurs $h_1$.*

**Démonstration.** Supposons d'abord que $f$ soit un *psi*. On en déduit que $H = V(A)$ et $H' = V'(A)$ sont isomorphes et que $f$ induit une injection $C \to C'$ dont on note $D$ le conoyau. Comme $V$ et $V'$ sont isomorphes, il résulte de 1.5 que $\mathrm{Tor}_1^A(C, .) \to \mathrm{Tor}_1^A(C', .)$ est un isomorphisme et, avec la suite exacte

$$\mathrm{Tor}_1^A(C, .) \to \mathrm{Tor}_1^A(C', .) \to \mathrm{Tor}_1^A(D, .) \to C \otimes . \to C' \otimes .$$

et le monomorphisme de foncteurs $C \otimes . \to C' \otimes .$, on en déduit $\mathrm{Tor}_1^A(D, .) = 0$, donc $D$ plat sur $A$.

Inversement, si on a la suite exacte $0 \to C \to C' \to D \to 0$ avec $D$ plat sur $A$ le morphisme $C \otimes . \to C' \otimes .$ est un monomorphisme et $\mathrm{Tor}_i^A(C, .) \to \mathrm{Tor}_i^A(C', .)$ est un isomorphisme pour $i > 0$. Si, de plus, on a $H \simeq H'$ on conclut, avec 1.5, que $V$ et $V'$ sont isomorphes, donc que $f$ est un *psi*.

Si de plus $f$ induit une surjection $N \to N'$, montrons que pour un $A$-module $Q$ le morphisme $h_1(L_\bullet \otimes_A Q) \to h_1(L'_\bullet \otimes_A Q)$ est surjectif. C'est vrai pour $Q = A$ par hypothèse, donc aussi pour $Q$ libre sur $A$. Dans le cas général on prend une résolution $0 \to G \to F \to Q \to 0$ avec $F$ libre. Comme les $L_i$ sont plats on en déduit une suite exacte de complexes :

$$0 \to L_\bullet \otimes G \to L_\bullet \otimes F \to L_\bullet \otimes Q \to 0$$

et de même pour $L'_\bullet$. En déroulant l'homologie on a le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
h_1(L_\bullet \otimes F) & \to & h_1(L_\bullet \otimes Q) & \to & h_0(L_\bullet \otimes G) & \to & h_0(L_\bullet \otimes F) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\
h_1(L'_\bullet \otimes F) & \to & h_1(L'_\bullet \otimes Q) & \to & h_0(L'_\bullet \otimes G) & \to & h_0(L'_\bullet \otimes F)
\end{array}$$

Le morphisme $\alpha$ est surjectif car $F$ est libre et $\gamma$ et $\delta$ sont des isomorphismes car $u$ est un *psi*. Il en résulte que $\beta$ est surjectif.

*f) Un "lemme de Verdier".*

Les propositions qui suivent ont pour but d'établir un lemme de calcul de fractions pour la relation de pseudo-isomorphisme 1.11 du type de celui de Verdier (cf. [V]) qui permet de se ramener à des chaînes de *psi* de longueur 2.

**Proposition 1.17.** *Soient $L_\bullet, L'_\bullet, L''_\bullet$ des triades et $u : L_\bullet \to L'_\bullet$ et $v : L_\bullet \to L''_\bullet$ des morphismes. On suppose que $u$ induit un isomorphisme $H \simeq H'$ sur les cœurs et une injection $C \to C'$ sur les conoyaux. On pose $D = C'/C$. Alors, il existe une triade $L'''_\bullet$ et* *des morphismes $u' : L''_\bullet \to L'''_\bullet$ et $v' : L'_\bullet \to L'''_\bullet$ avec $u'v = v'u$ à homotopie près et tels que $u'$ induise un isomorphisme $H'' \simeq H'''$ sur les cœurs, une injection $C'' \to C'''$ sur les conoyaux, avec le même quotient $C'''/C'' \simeq D$. On a donc le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} L_\bullet & \xrightarrow{v} & L''_\bullet \\ \Big\downarrow{\scriptstyle u} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u'} \\ L'_\bullet & \xrightarrow{v'} & L'''_\bullet \end{array}$$

**Démonstration.** Quitte à rajouter des queues (formées de $R_A$-modules de type fini) comme en 1.15 on peut supposer que $L_\bullet, L'_\bullet, L''_\bullet$ sont des complexes définis pour $i \geq -1$ avec comme seuls modules d'homologie non nuls les cœurs et les conoyaux. Comme la catégorie des complexes est triangulée ([RD] I 2) on peut insérer le morphisme $u$ dans un triangle $L_\bullet \xrightarrow{u} L'_\bullet \to X_\bullet \to L_\bullet[-1]$ où le complexe $X_\bullet$ est le cône de $u$, donc est adéquat. On obtient une suite exacte d'homologie

$$\cdots h_0 L_\bullet \to h_0 L'_\bullet \to h_0 X_\bullet \to h_{-1} L_\bullet \to h_{-1} L'_\bullet \to h_{-1} X_\bullet \to h_{-2} L_\bullet$$

dont on déduit qu'on a $h_{-1} X_\bullet = C'/C = D$ et $h_i X_\bullet = 0$ pour $i \neq -1$.

On considère ensuite le morphisme composé $X_\bullet \to L_\bullet[-1] \to L''_\bullet[-1]$ que l'on insère dans un triangle $L''_\bullet \to L'''_\bullet \to X_\bullet \to L''_\bullet[-1]$ avec $L'''_\bullet$ adéquat. La suite exacte longue analogue pour ce triangle montre que le noyau de $L'''_\bullet$ est nul et que $u'$ induit un isomorphisme des cœurs $H'' \simeq H'''$ et une injection des conoyaux $C'' \to C'''$ avec pour quotient $D$.

Enfin, l'existence du morphisme $v'$ commutant, à homotopie près, avec les autres résulte de l'axiome (TR3) des catégories triangulées ([RD] p. 21). Il ne reste plus qu'à couper les queues des complexes obtenus pour retrouver les triades cherchées (la finitude des noyaux résulte du fait que les queues sont formées de $R_A$-modules de type fini).

**Corollaire 1.18.** *On reprend les notations de 1.17 et on suppose que $u$ est un* psi*. Alors $u'$ est un* psi*. De plus, si $v$ est aussi un* psi*, il en est de même de $v'$.*

**Démonstration.** Si $u$ est un *psi* le module $D$ est plat sur $A$ (cf. 1.16), donc $u'$ est aussi un *psi*. Si $v$ est un *psi*, le composé $u'v$ aussi et donc aussi $v'u$ qui lui est homotope (cf. 1.8). On vérifie enfin que $v'$ induit un isomorphisme $H' \simeq H'''$ et une injection $C' \to C'''$ avec $C'''/C' \simeq C''/C$ donc plat sur $A$ puisque $v$ est un *psi*.

**Corollaire 1.19.** *(Lemme de Verdier pour les triades) Soient $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ deux triades pseudo-isomorphes. Alors il existe une triade $L''_\bullet$ et des* psi *$L_\bullet \to L''_\bullet$ et $L'_\bullet \to L''_\bullet$.*

**Démonstration.** Par récurrence sur la longueur de la chaîne de *psi* joignant $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ en utilisant 1.18.

Attention, on n'a pas, en général, l'analogue du lemme de Verdier avec les flèches en sens inverse. Voir cependant 2.*d)* pour un succédané.

**Proposition 1.20.** *(Lemme de factorisation) Soient $u : L_\bullet \to L''_\bullet$ et $v : L'_\bullet \to L''_\bullet$ deux morphismes de triades. On suppose :*
*a) que $v$ induit un isomorphisme $H' \simeq H''$ sur les cœurs et une injection $C' \to C''$ sur les conoyaux,*
*b) que le morphisme $C \to C''$ induit par $u$ se factorise par $C'$,*
*c) que $L_\bullet$ est une triade majeure.*
*Alors il existe un morphisme $w : L_\bullet \to L'_\bullet$ tel que l'on ait $u = vw$ à homotopie près.*

**Démonstration.** Comme dans 1.15 on peut supposer, en ajoutant des queues, que les triades sont des complexes définis pour $i \geq -1$, avec seulement deux groupes d'homologie non nuls.

On complète le morphisme $v$ en un triangle $L'_\bullet \to L''_\bullet \to X_\bullet \to L'_\bullet[-1]$. L'hypothèse a) montre que l'on a $h_{-1}X_\bullet = C''/C' = D$ et que les autres groupes d'homologie de $X_\bullet$ sont nuls. On complète ensuite le morphisme composé $L_\bullet \to X_\bullet$ en un triangle $L'''_\bullet \to L_\bullet \to X_\bullet \to L'''_\bullet[-1]$. La suite exacte d'homologie donne alors $H''' \simeq H$ et une suite exacte :

$$0 \to C''' \to C \to D \to h_{-2}(L'''_\bullet),$$

et, puisque le morphisme $C \to C''$ se factorise par $C'$ on voit que $C \to D$ est nul, donc $C''' \simeq C$.

En vertu de l'axiome (TR3) on a un morphisme $L'''_\bullet \to L'_\bullet$ qui rend commutatif, à homotopie près, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
L'''_\bullet & \to & L_\bullet & \to & X_\bullet & \to & L'''_\bullet[-1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow \\
L'_\bullet & \to & L''_\bullet & \to & X_\bullet & \to & L'_\bullet[-1]
\end{array}$$

On notera que le groupe $h_{-2}L'''_\bullet$ peut être non nul. On remplace donc $L'''_\bullet$ par $L^{iv}_\bullet = \cdots L'''_1 \to L'''_0 \to Z_{-1}(L'''_\bullet) \to 0$ (où $Z_{-1}(L'''_\bullet)$ est le noyau de $L'''_{-1} \to L'''_{-2}$) et on a un morphisme canonique $L^{iv}_\bullet \to L'''_\bullet$ qui induit un isomorphisme sur les $h_i$ pour $i \geq -1$. Alors, le morphisme $L^{iv}_\bullet \to L_\bullet$ est un *qis*. Comme $L_\bullet$ est une triade majeure, il résulte de [RD] I, 4.5, p. 41 (appliqué en renversant les flèches et avec des libres au lieu d'injectifs) que ce morphisme a un inverse à homotopie près. Le morphisme cherché s'obtient en composant $L_\bullet \to L^{iv}_\bullet \to L'''_\bullet \to L'_\bullet$.

Avec cette proposition et 1.8 on obtient :

**Corollaire 1.21.** *Soient $u : L_\bullet \to L''_\bullet$ et $v : L'_\bullet \to L''_\bullet$ deux* psi*, avec $L_\bullet$ majeure. On suppose que le morphisme $C \to C''$ induit par $u$ se factorise par $C'$. Alors il existe un* psi *$w : L_\bullet \to L'_\bullet$ vérifiant $u = vw$ à homotopie près.*

**Corollaire 1.22.** *(Lemme de Verdier pour les triades majeures) Si $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont deux triades majeures pseudo-isomorphes il existe une triade majeure $L''_\bullet$ et des* psi *$L_\bullet \to L''_\bullet$ et $L'_\bullet \to L''_\bullet$.*

**Démonstration.** En vertu du lemme de Verdier on a $L''_\bullet$ qui minore les deux triades. On regarde alors la résolution majeure $M_\bullet$ de $L''_\bullet$ et on conclut par 1.21.

*g) Triades duales.*

Soit $L_\bullet$ une triade. Le complexe dual $L_\bullet^*$ n'est pas, en général, une triade. En effet, si le cœur et le noyau de $L_\bullet^*$ sont des $A$-modules de type fini, le conoyau n'est pas, en général, de type fini sur $A$ (considérer par exemple, la triade $L_\bullet = (R_A \to 0 \to 0)$). Nous allons contourner cette difficulté en utilisant une troncature, mais la triade duale sera définie seulement à *psi* près.

Pour établir les propriétés essentielles de la dualité nous aurons besoin de deux notions supplémentaires et de deux lemmes concernant ces notions :

**Définition 1.23.**
*1) On appelle* **triade mineure** *une triade $P_\bullet$ dans laquelle les $R_A$-modules $P_i$ sont de type fini sur $A$.*
*2) Un* **pseudo-isomorphisme fort** *de complexes adéquats (en abrégé un psi fort) est un psi qui induit un épimorphisme de foncteurs : $h_1(L_\bullet \otimes_A \bullet) \to h_1(L'_\bullet \otimes_A \bullet)$.*

**Lemme 1.24.**
*1) Soit $L_\bullet$ une triade majeure, $p : L_\bullet \to L_{\bullet \leq r}$ la projection canonique. Alors, $L_{\bullet \leq r}$ est une triade mineure et, si $r$ est assez grand, $p$ est un psi fort qui induit un isomorphisme sur les conoyaux. Cette opération de troncature est fonctorielle.*
*2) Toute triade est pseudo-isomorphe à une triade mineure, précisément, si $L_\bullet$ est une triade, il existe deux triades $M_\bullet$ et $P_\bullet$ avec $M_\bullet$ majeure et $P_\bullet$ mineure et des psi forts $u : M_\bullet \to L_\bullet$ et $v : M_\bullet \to P_\bullet$.*

**Démonstration.**
1) Comme $L_\bullet$ est une triade majeure les modules $L_{i,n}$ sont nuls pour $n \ll 0$, donc les modules tronqués $L_{i,\leq r}$ sont de type fini sur $A$ et $L_{\bullet \leq r}$ est bien une triade mineure. Comme $C$ et $H$ sont de type fini sur $A$ on a $C_n = H_n = 0$ pour $n \gg 0$, disons pour $n > r$ et on en déduit que les foncteurs $h_0(L_{\bullet > r} \otimes_A \bullet)$ et $h_{-1}(L_{\bullet > r} \otimes_A \bullet)$ sont nuls. On conclut alors par 1.9. Le point 2) résulte de 1.14 et de 1).

**Lemme 1.25.**
*1) Le dual d'un psi fort est un psi fort.*
*2) Soit $u : L_\bullet \to L'_\bullet$ un psi entre deux triades. Il existe une triade $L''_\bullet$ et des psi forts $v : L''_\bullet \to L_\bullet$ et $w : L''_\bullet \to L'_\bullet$ (mais le triangle n'est pas, en général, commutatif).*
*Sur l'ensemble des triades les relations d'équivalence engendrées par les psi et les psi forts sont les mêmes.*

**Démonstration.** Le point 1) est clair. Pour 2), soit $N'$ le noyau de $L'_\bullet$ et $\pi : F \to N'$ une résolution libre de $N'$. On pose $L''_{-1} = L_{-1}$, $L''_0 = L_0$, $d''_0 = d_0$, $L''_1 = L_1 \oplus F$ et $d''_1 = (d_1, 0)$. On pose ensuite $v_{-1} = \mathrm{Id}$, $v_0 = \mathrm{Id}$, $v_1 = (\mathrm{Id}, 0)$ et $w_{-1} = u_{-1}$, $w_0 = u_0$ et $w_1 = (u_1, i\pi)$ où $i$ est l'injection de $N'$ dans $L'_1$ et on a la propriété requise.

**Proposition-définition 1.26.**
*Soit $L_\bullet$ une triade, et soit $L_\bullet^*$ le complexe dual.*
*1) Il existe un entier $r$ tel que, pour tout $n \leq r$, les foncteurs $h_1((L_\bullet^*)_n \otimes_A \bullet)$ et $h_0((L_\bullet^*)_n \otimes_A \bullet)$ soient nuls. Un tel entier sera dit convenable.*
*2) Si $r$ est convenable le complexe $(L_\bullet^*)_{>r}$ est une triade et l'inclusion $j : (L_\bullet^*)_{>r} \subset L_\bullet^*$ est*

*un psi fort. On dit que* $(L^*_\bullet)_{>r}$ *est* **une triade duale** *de* $L_\bullet$.
*Si* $r$ *et* $r'$ *sont deux entiers convenables avec* $r' < r$ *l'inclusion* $j_{r,r'} : (L^*_\bullet)_{>r} \subset (L^*_\bullet)_{>r'}$ *est un psi fort. Si on a trois entiers convenables avec* $r'' < r' < r$ *on a* $j_{r,r'}j_{r',r''} = j_{r,r''}$.

**Démonstration.** Le point 1) est conséquence du fait que les foncteurs $h_1((L^*_\bullet)_n \otimes_A \bullet)$ et $h_0((L^*_\bullet)_n \otimes_A \bullet)$ sont respectivement duaux de $h_{-1}((L_\bullet)_{-n} \otimes_A \bullet)$ et $h_0((L_\bullet)_{-n} \otimes_A \bullet)$ qui sont nuls pour $n \ll 0$ et $n \gg 0$ (cf. 1.12.3).

Comme $h_1(L_\bullet \otimes_A \bullet)$ est borné inférieurement, cf. 1.12.3, $h_{-1}(L^*_\bullet \otimes_A \bullet)$ est borné supérieurement et il est clair alors que $(L^*_\bullet)_{>r}$ est une triade. On considère la suite exacte de complexes $0 \to (L^*_\bullet)_{>r} \xrightarrow{j} L^*_\bullet \to (L^*_\bullet)_{\leq r} \to 0$. La suite d'homologie associée jointe aux hypothèses de nullité sur $(L^*_\bullet)_{\leq r}$ montre que $j$ est un *psi* fort. La dernière propriété est claire.

La proposition suivante résume les propriétés de la dualité :

**Proposition 1.27.**
*0) Si* $P_\bullet$ *est une triade mineure le complexe* $P^*_\bullet$ *(qui est aussi une triade mineure) est une triade duale de* $P_\bullet$.
*1) Soient* $M_\bullet$ *et* $M'_\bullet$ *deux triades duales de* $L_\bullet$ *et* $L'_\bullet$ *respectivement. Si* $L_\bullet$ *et* $L'_\bullet$ *sont pseudo-isomorphes il en est de même de* $M_\bullet$ *et* $M'_\bullet$.
*2) Si* $M_\bullet$ *est une triade duale de* $L_\bullet$, $L_\bullet$ *est pseudo-isomorphe à toute triade duale de* $M_\bullet$.
*3) Le foncteur associé à une duale de* $L_\bullet$ *est le dual (cf. § 0) du foncteur associé à* $L_\bullet$.
*4) Si* $L_\bullet$ *est une triade,* $M_\bullet$ *une triade majeure et si on a un morphisme de complexes* $u : M_\bullet \to L^*_\bullet$ *qui est un psi,* $M_\bullet$ *est pseudo-isomorphe à toute triade duale de* $L_\bullet$.

**Démonstration.** Pour le point 0), si $P_\bullet$ est une triade mineure il en est de même de $P^*_\bullet$ donc, pour $r$ assez petit, on a $P^*_\bullet = (P^*_\bullet)_{>r}$. On conclut par 1.26.

Montrons l'assertion 1). Si $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont pseudo-isomorphes on peut, en vertu de 1.25.2, les joindre par une chaîne de *psi* forts entre des triades $(L_\bullet)_i$. On a alors, par 1.25.1, des *psi* forts entre les complexes duaux $((L_\bullet)_i)^*$ qui induisent, pour $r$ assez petit, des *psi* entre les complexes tronqués. Il en résulte que les complexes tronqués associés à $L^*_\bullet$ et $L'^*_\bullet$ (c'est-à-dire les triades duales) sont pseudo-isomorphes.

Soit $P_\bullet$ une triade mineure pseudo-isomorphe à $L_\bullet$ (cf. 1.24.2). Les points 0) et 1) ci-dessus montrent successivement que $M_\bullet$ est pseudo-isomorphe à $P^*_\bullet$, puis que toute triade duale de $M_\bullet$ est pseudo-isomorphe à $(P^*_\bullet)^* = P_\bullet$, donc aussi à $L_\bullet$, ce qui établit le point 2).

L'assertion sur les foncteurs résulte de [H] 4.3 (cf. 1.3) et du fait que l'inclusion $(L^*_\bullet)_{>r} \subset L^*_\bullet$ est un *psi*.

Montrons le point 4). Pour $r$ assez petit $(L^*_\bullet)_{>r}$ est une triade duale de $L_\bullet$ et, comme $M_\bullet$ est majeure, $u$ se factorise en $M_\bullet \xrightarrow{v} (L^*_\bullet)_{>r} \xrightarrow{j} L^*_\bullet$. Comme $u$ et $j$ sont des *psi*, on conclut par 1.8.

*h) Triades minimales, triades élémentaires.*

**Proposition-Définition 1.28.** *1) L'ensemble des* $R_A$*-modules gradués* $C$ *qui sont de type fini sur* $A$ *est (partiellement) ordonné par la relation :* $C \prec C'$ *s'il existe* $u : C \to C'$, $R_A$*-linéaire, injectif avec* $C'/C$ *plat sur* $A$.

*2) L'ensemble des triades pseudo-isomorphes à une triade donnée est préordonné par la relation :* $L_\bullet \prec L'_\bullet$ *s'il existe un psi* $u : L_\bullet \to L'_\bullet$.
*Si on a* $L_\bullet \prec L'_\bullet$ *et* $L'_\bullet \prec L_\bullet$, *il existe un psi* $u : L_\bullet \to L'_\bullet$ *qui induit un isomorphisme sur les conoyaux.*
*Les éléments minimaux pour cette relation sont appelés* **triades minimales**. *Un élément minimum, s'il en existe, est appelé* **triade élémentaire**.
*3) L'application qui à une triade associe son conoyau est croissante pour les relations précédentes.*

**Démonstration.** Dans le point 1) seule l'antisymétrie de la relation est non triviale. Si on a $C \prec C' \prec C$ on a une suite exacte $0 \to C \xrightarrow{i} C \to M \to 0$ avec $M$ plat sur $A$. Comme $C$ est de type fini on en déduit $M = 0$.

Les autres points de la proposition sont clairs.

**Lemme 1.29.** *Soit* $C$ *un* $R_A$*-module gradué, de type fini sur* $A$. *Alors, il existe* $C_0$ *avec* $C_0 \prec C$ *et* $C_0$ *minimal pour la relation* $\prec$.

**Démonstration.** En effet, si on a $C_0 \prec C$, le quotient $C/C_0$ est plat sur $A$ et la conclusion s'obtient en raisonnant par récurrence sur la somme des rangs de ce quotient aux points génériques.

Le lemme suivant assure l'existence de triades minimales :

**Lemme 1.30.** *Soit* $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ *une triade,* $C$ *son conoyau et* $C'$ *un sous-*$R_A$*-module de* $C$. *Il existe une triade* $L'_\bullet$, *de conoyau* $C'$, *et un psi* $u : L'_\bullet \to L_\bullet$ *qui induit un isomorphisme sur les cœurs et l'injection donnée sur les conoyaux.*
*Il existe une triade minimale parmi les triades pseudo-isomorphes à* $L_\bullet$.

**Démonstration.** On peut supposer $L_\bullet$ majeure, quitte à la remplacer par une résolution. Si $p : L_{-1} \to C$ est le morphisme canonique on choisit une résolution libre $L'_{-1} \to p^{-1}(C')$. Le morphisme $d_0$ est à valeurs dans $p^{-1}(C')$ et on peut le relever en $d'_0 : L_0 \to L'_{-1}$. On prend alors $L'_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d'_0} L'_{-1})$.

Le deuxième point résulte du premier et de 1.29.

**Remarque 1.31.** En revanche, il n'existe pas en général de triade élémentaire dans une classe d'équivalence pour la relation de pseudo-isomorphisme (cf. 1.35.a). Nous allons voir que c'est vrai dans le cas d'un anneau de valuation discrète.

**Proposition 1.32.** *Soit* $A$ *un anneau de valuation discrète.*
*1) Une triade majeure* $M_\bullet$ *est élémentaire si et seulement si son conoyau* $C$ *est de torsion.*
*2) Soit* $L_\bullet$ *une triade,* $C$ *son conoyau et* $C_\tau$ *le sous-*$R_A$*-module de* $C$ *formé des éléments de torsion sur* $A$. *Alors il existe une triade majeure élémentaire* $M_\bullet$ *de conoyau* $C_\tau$ *et un psi* $u : M_\bullet \to L_\bullet$. *De plus, cette triade est unique à un psi près induisant un isomorphisme sur les conoyaux.*

**Démonstration.**

1) Soit $L'_\bullet$ une triade pseudo-isomorphe à $M_\bullet$. Alors, il existe une triade $L''_\bullet$ et des *psi* $M_\bullet \to L''_\bullet$ et $L'_\bullet \to L''_\bullet$ en vertu de 1.19. On applique alors 1.20 à ces morphismes. Il

faut montrer que l'inclusion $C \to C''$ se factorise par $C' \to C''$ ce qui résulte du fait que le quotient $C''/C'$ est plat et que $C$ est de torsion.

2) Le lemme 1.30 assure l'existence d'une triade $L'_{\bullet}$ de conoyau $C_\tau$ et d'un morphisme $u : L'_{\bullet} \to L_{\bullet}$. Comme $C/C_\tau$ est plat sur $A$, $u$ est un *psi*. Pour avoir la triade majeure $M_{\bullet}$ cherchée il suffit de prendre une résolution majeure de $L'_{\bullet}$. L'unicité vient du point 1) et de 1.28.2.

**Corollaire 1.33.** *Soit $A$ un anneau de valuation discrète et soit $u : L_{\bullet} \to L'_{\bullet}$ un morphisme de triades qui induit un isomorphisme sur les foncteurs associés. Alors $L_{\bullet}$ et $L'_{\bullet}$ sont pseudo-isomorphes. Plus précisément on a un diagramme, commutatif à homotopie près, où les morphismes autres que $u$ sont des psi :*

$$\begin{array}{ccc} M_{\bullet} & \xrightarrow{v} & M'_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{\bullet} & \xrightarrow{u} & L'_{\bullet} \end{array}$$

**Démonstration.** En vertu de 1.5, $u$ induit un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Tor}_1^A(C, .) \to \mathrm{Tor}_1^A(C', .)$. Cela implique que les sous-modules de torsion $C_\tau$ et $C'_\tau$ sont isomorphes (cf. [H] 5.2). Si $M_{\bullet}$ et $M'_{\bullet}$ sont les triades majeures élémentaires données par 1.32, il existe un morphisme $v$ comme annoncé en vertu de 1.20.

(Attention, $u$ lui-même n'est pas nécessairement un *psi* car il ne vérifie pas l'hypothèse sur les conoyaux.)

**Remarques 1.34.**
1) Soient $L_{\bullet}$ et $L'_{\bullet}$ deux triades et $V_L$ et $V_{L'}$ les foncteurs associés. Attention, le corollaire 1.33 n'implique pas que si $V_L$ et $V_{L'}$ sont isomorphes les triades soient elles-mêmes pseudo-isomorphes. L'existence du morphisme $u$ est essentielle, cf. 1.35.c.
2) On montre aisément, à la manière de [Ho], qu'une triade majeure élémentaire est caractérisée, à un *psi* induisant un isomorphisme sur les conoyaux près, par son cœur, son conoyau et par l'élément de $\mathrm{Ext}^2_{R_A}(C, H)$ associé.

*i) Exemples.*

**Exemples 1.35.**
a) Sur un anneau quelconque, une classe d'équivalence de triades pour la relation de pseudo-isomorphisme ne contient pas nécessairement d'élément minimum (c'est-à-dire de triade élémentaire).

Soit $A$ un anneau local régulier de dimension 2 d'idéal maximal $m$. Soit $C$ le $R_A$-module égal à $m \oplus A$ en degré 0 et à $A$ en degré 1 avec la multiplication par $X : m \oplus A \to A$ donnée par la matrice $(0, 1)$ et les autres multiplications nulles. Soit $C_1$ le sous-$R_A$-module $m$ de $C$, de sorte que $C/C_1 = A \oplus A$ est plat sur $A$. Soit $\psi : m \to m \oplus A$ le morphisme donné par $\psi(a) = (a, a)$ et soit $C_2$ le sous-module de $C$ égal à $\mathrm{Im}\,\psi$ en degré 0 et $A$ en degré 1. Là encore $C/C_2 = A$ est plat sur $A$. On considère alors les triades $L_{\bullet} = 0 \to 0 \to C$, $L^{(1)}_{\bullet} = 0 \to 0 \to C_1$ et $L^{(2)}_{\bullet} = 0 \to 0 \to C_2$. Les flèches naturelles correspondant aux inclusions de $C_1$ et $C_2$ dans $C$ sont des *psi*, donc ces triades sont pseudo-isomorphes. Les triades $L_\bullet^{(1)}$ et $L_\bullet^{(2)}$ sont toutes deux minimales. En effet, c'est clair pour $L_\bullet^{(1)}$ car $C_1 = m$ n'a pas de quotient plat sur $A$ non nul (car $m$ n'est pas plat puisque $A$ est de dimension 2). Pour $L_\bullet^{(2)}$, $C_2$ vaut $m$ en degré 0 et $A$ en degré 1 et la multiplication par $X$ est l'inclusion de $m$ dans $A$, de sorte que $C_2$ n' a pas de sous-$R_A$-module dont le quotient soit plat sur $A$ (le seul sous-$A$-module à quotient plat est $m$ qui n'est pas un sous-$R_A$-module).

b) Sur un anneau quelconque, on peut avoir un morphisme $u$ entre deux triades pseudo-isomorphes, qui induise un isomorphisme sur les foncteurs associés, mais ne soit ni un *psi*, ni compatible avec une équivalence *psi* "à la Verdier" comme en 1.19, ni avec une équivalence du type 1.33.

On reprend en effet les triades $L_\bullet^{(2)}$ et $L_\bullet^{(1)}$ de l'exemple a) et on a un morphisme de triades $L_\bullet^{(2)} \to L_\bullet^{(1)}$ et le morphisme des foncteurs associés est $\mathrm{Tor}\,_1^A(C_2, .) \to \mathrm{Tor}\,_1^A(C_1, .)$ qui est un isomorphisme en vertu de la suite exacte scindée sur $A :\ 0 \to A \to C_2 \to C_1 \to 0$.

Cependant, on voit aussitôt que $u$ n'est pas un *psi*, ni compatible avec une équivalence du type 1.19 ou 1.33 (sinon $C_2 \to C_1$ serait injective).

c) Même sur un anneau de valuation discrète, deux triades peuvent avoir même foncteur associé sans être pseudo-isomorphes.

On suppose que $A$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante $a$ et de corps résiduel $k$. On va construire deux triades avec $C = k$ et $H = k(-2)$. Pour cela, on va exhiber deux éléments de $\mathrm{Ext}\,^2_{R_A}(C, H)$, cf. 1.34. Le groupe $\mathrm{Ext}\,^2_{R_A}(k, k(-2))$ se calcule avec le complexe de Koszul associé à la suite $(a, X, Y, Z, T)$ (dont on numérote les éléments de 0 à 4) et on a $\mathrm{Ext}\,^2_{R_A}(k, k(-2)) = k(-1)^4 \oplus k^6$. Les premières composantes ont pour base les $e_{0,i}$, $i = 1, \cdots, 4$ et les autres ont pour base les $e_{i,j}$ avec $1 \le i < j \le 4$.

On prend d'abord l'élément $e_{1,2}$ qui donne la triade $L_\bullet = 0 \to L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1}$ avec $L_0 = k[x](-1)$, avec $x^2 = 0$, $L_{-1} = k[y]$, avec $y^2 = 0$ et $d_0(1) = y$. On vérifie que cette triade a bien les $C$ et $H$ voulus. On note que cette triade est minimale (car $C$ est de torsion) et toute résolution majeure $M_\bullet$ de $L_\bullet$ est élémentaire.

On prend ensuite l'élément nul de $\mathrm{Ext}\,^2$ qui donne la triade $L'_\bullet = 0 \to k(-2) \xrightarrow{0} k$. Là encore cette triade a les $C$ et $H$ voulus, elle est minimale et toute résolution majeure $M'_\bullet$ est élémentaire. Cela montre que ces triades ne sont pas pseudo-isomorphes, sinon leurs résolutions majeures seraient les mêmes à un *psi* induisant un isomorphisme sur les conoyaux près, ce qui donnerait le même élément du $\mathrm{Ext}\,^2$.

Par ailleurs, en vertu de 1.5, les foncteurs associés sont tous deux extensions de $\mathrm{Tor}\,_1^A(k, .)$ par $k(-2) \otimes_A .$ et on voit qu'on a $V(Q) = \mathrm{Hom}\,(k, Q) \oplus (k(-2) \otimes Q)$ comme $A$-module. De plus, la structure de $R_A$-module est nécessairement triviale, donc les foncteurs sont isomorphes.

*j) Annexe : généralisation.*

Nous donnons dans ce paragraphe quelques éléments permettant de généraliser la définition des triades en s'affranchissant de l'hypothèse de platitude. La définition est exactement celle de 1.10 dans laquelle on ne suppose plus les complexes adéquats. On parlera alors de triades "faibles". On a encore l'existence des résolutions majeures (1.14).

La différence essentielle réside dans la définition du foncteur $V$ associé qui est défini "en le pensant dans la catégorie dérivée" :

**Proposition-Définition 1.36.** *Soit $L_\bullet$ une triade faible et $M_\bullet \to L_\bullet$ une résolution majeure. Le* **foncteur associé** *à $L_\bullet$ est le foncteur $V_{L_\bullet}$ (ou simplement $V$) de* $\mathrm{Mod}_A$ *dans* $\mathrm{Gr}_{R_A}$ *défini pour tout $A$-module $Q$ par la formule $V(Q) = h_0(M_\bullet \otimes_A Q)$. Il est indépendant du choix de la triade majeure $M_\bullet$. L'application qui à une triade $L_\bullet$ associe le foncteur $V_{L_\bullet}$ est fonctorielle.*

**Démonstration.** Le fait que $V$ ne dépende pas de $M_\bullet$ résulte du lemme 1.37 ci-dessous et de la démonstration de [AG] III 12.3 (car les modules $M_i$ sont plats sur $A$). La fonctorialité vient du lemme 1.38 ci-dessous.

**Lemme 1.37.** *Soit $L_\bullet$ une triade faible et soient $i : M_\bullet \to L_\bullet$, $i' : M'_\bullet \to L_\bullet$ deux résolutions majeures de $L_\bullet$. Alors, il existe un morphisme de triades $g : M_\bullet \to M'_\bullet$ tel que $i$ et $i'g$ soient homotopes. En particulier les isomorphismes induits par $i$ et $i'g$ sur les cœurs et les conoyaux de ces triades coïncident.*

**Lemme 1.38.** *Soit $f : L_\bullet \to L'_\bullet$ un morphisme de triades faibles et $i' : F'_\bullet \to L'_\bullet$ une résolution libre. Alors, il existe une résolution libre $i : F_\bullet \to L_\bullet$ et un morphisme de complexes $g : F_\bullet \to F'_\bullet$ tels que les flèches $fi$ et $i'g$ soient homotopes.*

Ces lemmes, que nous laissons au lecteur, se démontrent en travaillant dans la catégorie triangulée des complexes de $R_A$-modules, cf. [RD].

**Remarques 1.39.**
1) Le lemme 1.5 vaut, pour le nouveau foncteur $V$, sans hypothèse de platitude.
2) Attention, le foncteur $V$ défini ci-dessus n'est pas, en général, égal au foncteur $V_0$ naïf défini par $V_0(Q) = h_0(L_\bullet \otimes_A Q)$. Considérons par exemple un anneau $A$ local d'idéal maximal $m$ et de corps résiduel $k$ et la triade $0 \to A \xrightarrow{p} k$ où $p$ est la projection canonique. On a donc $C = 0$ et $H = m$, d'où $V(Q) = m \otimes_A Q$ en vertu de 1.5, tandis que $V_0(Q)$ est égal à $mQ$.
3) Bien entendu, dans la définition des pseudo-isomorphismes entre triades générales, la condition portant sur le foncteur naïf $V_0 = h_0(L_\bullet \otimes_A \bullet)$ doit être remplacée par la condition analogue avec le nouveau foncteur $V$.

## 2. Faisceaux triadiques.

L'objectif de ce paragraphe est de définir les faisceaux triadiques qui sont directement liés aux triades majeures et de montrer que les notions de pseudo-isomorphismes, au sens de [HMDP1] pour les faisceaux et du § 1 pour les triades, se correspondent.

Rappelons que pour un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{P}^3_A$, plat sur $A$, l'expression "$H^i_*\mathcal{F}$ commute au changement de base" signifie que, pour tout $A$-module $Q$, l'homomorphisme canonique $(H^i_*\mathcal{F}) \otimes_A Q \to H^i_*(\mathcal{F} \otimes_A Q)$ est un isomorphisme. Cette condition est équivalente à l'exactitude à droite du foncteur $H^i_*(\mathcal{F} \otimes_A \bullet)$ ou encore, via la suite longue de cohomologie, à l'exactitude à gauche de $H^{i+1}_*(\mathcal{F} \otimes_A \bullet)$. Rappelons aussi, cf. [AG] III 12.11 que si $H^i_*\mathcal{F}$ commute au changement de base, on a les équivalences : $H^i_*\mathcal{F}$ est plat sur $A \iff H^i(\mathcal{F} \otimes_A \bullet)$ exact $\iff H^{i-1}_*\mathcal{F}$ commute au changement de base.

*a) Faisceaux triadiques.*

**Proposition 2.1.** *Soit $\mathcal{N}$ un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}^3_A$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
*i) Il existe une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$$

*avec les faisceaux $\mathcal{L}_i$ dissociés.*
*ii) Le faisceau $\mathcal{N}$ est localement libre et il existe une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{M}^{-1} \to \mathcal{M}^0 \to \mathcal{M}^1 \to \mathcal{N}^\vee \to 0$$

*avec les $\mathcal{M}^i$ dissociés.*
*iii) Le faisceau $\mathcal{N}$ est localement libre et le foncteur $H^2_*(\mathcal{N} \otimes_A \boldsymbol{.})$ de $\mathrm{Mod}_A$ dans $\mathrm{Gr}_{R_A}$ est exact à droite.*
*iv) Le faisceau $\mathcal{N}$ est localement libre et le foncteur $H^0_*(\mathcal{N}^\vee \otimes_A \boldsymbol{.})$ est exact à droite.*
*v) Le faisceau $\mathcal{N}$ est localement libre et le foncteur $H^3_*(\mathcal{N} \otimes_A \boldsymbol{.})$ de $\mathrm{Mod}_A$ dans $\mathrm{Gr}_{R_A}$ est exact à gauche.*
*vi) Le faisceau $\mathcal{N}$ est localement libre et le foncteur $H^1_*(\mathcal{N}^\vee \otimes_A \boldsymbol{.})$ de $\mathrm{Mod}_A$ dans $\mathrm{Gr}_{R_A}$ est exact à gauche.*

**Démonstration.** L'équivalence de *i)* et *ii)* est claire par dualité. (On notera que la condition *i)* implique que le faisceau est localement libre.) De même l'équivalence de *iii)* et *v)* (resp. de *iv)* et *vi)*) est évidente.

*iii) $\Longleftrightarrow$ vi).* Il suffit de montrer les assertions analogues pour les foncteurs $H^2(\mathcal{N}(l) \otimes_A \boldsymbol{.})$ et $H^1(\mathcal{N}^\vee(-l-4) \otimes_A \boldsymbol{.})$ pour tout $l \in \mathbf{Z}$. En vertu de [H] 7.4, le foncteur $F = H^2(\mathcal{N}(l) \otimes_A \boldsymbol{.})$ est dual du foncteur $F^* = H^1(\mathcal{N}^\vee(-l-4) \otimes_A \boldsymbol{.})$ au sens de la dualité des foncteurs cohérents, cf. [H, §4], de sorte que $F$ exact à droite équivaut à $F^*$ exact à gauche.

*ii) $\Rightarrow$ iv).* La suite exacte de *ii)* donne deux suites exactes courtes $0 \to \mathcal{M}^{-1} \to \mathcal{M}^0 \to \mathcal{K} \to 0$ et $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{M}^1 \to \mathcal{N}^\vee \to 0$ avec $\mathcal{K}$ localement libre. Comme les $\mathcal{M}^i$ sont dissociés, le foncteur $H^1_*(\mathcal{K} \otimes \boldsymbol{.})$ est nul. Il en résulte que le morphisme de foncteurs $H^0_*(\mathcal{M}^1 \otimes \boldsymbol{.}) \to H^0_*(\mathcal{N}^\vee \otimes \boldsymbol{.})$ est un épimorphisme. Comme $\mathcal{M}^1$ est dissocié, $H^0_*(\mathcal{M}^1 \otimes \boldsymbol{.})$ est exact à droite, donc aussi $H^0_*(\mathcal{N}^\vee \otimes \boldsymbol{.})$.

*iv) $\Rightarrow$ ii).* On pose $T = H^0_*(\mathcal{N}^\vee)$ et on considère une résolution libre $F_1 \xrightarrow{v} F_0 \to T \to 0$. Soit $G = \operatorname{Ker} v$. On a la suite des faisceaux associés $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{N}^\vee \to 0$ avec les $\mathcal{F}_i$ dissociés et $\mathcal{G}$ localement libre. Il s'agit de montrer que $\mathcal{G}$ est dissocié. On coupe cette suite en deux : $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{S} \to 0$ et $0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{N}^\vee \to 0$. La flèche $F_0 = H^0_*(\mathcal{F}_0) \to H^0_*(\mathcal{N}^\vee) = T$ est surjective par construction. Par ailleurs, le foncteur $H^0_*(\mathcal{N}^\vee \otimes \boldsymbol{.})$ étant exact à droite, on a $H^0_*(\mathcal{N}^\vee \otimes \boldsymbol{.}) = H^0_*(\mathcal{N}^\vee) \otimes \boldsymbol{.}$. Comme la même chose est vraie pour le faisceau dissocié $\mathcal{F}_0$, on en conclut que le morphisme de foncteurs $H^0_*(\mathcal{F}_0 \otimes \boldsymbol{.}) \to H^0_*(\mathcal{N}^\vee \otimes \boldsymbol{.})$ est surjectif, ce qui montre que $H^1_*(\mathcal{S} \otimes \boldsymbol{.}) = H^2_*(\mathcal{G} \otimes \boldsymbol{.})$ est nul et que $H^0_*(\mathcal{S} \otimes \boldsymbol{.})$ est exact à droite. Le même argument avec l'autre suite exacte montre que $H^0_*(\mathcal{F}_1 \otimes \boldsymbol{.}) \to H^0_*(\mathcal{S} \otimes \boldsymbol{.})$ est surjectif, donc que $H^1_*(\mathcal{G} \otimes \boldsymbol{.})$ est nul. En vertu de [H] 7.7 on voit que $\mathcal{G}$ est dissocié, ce qui montre *ii)*.

**Remarque 2.2.** La condition $H^2_*(\mathcal{N} \otimes_A \boldsymbol{.})$ exact à droite est équivalente à la platitude de $H^3_*\mathcal{N}$ sur $A$ (cf. [AG] III 12.11 ou le fait que le foncteur $H^3_*(\mathcal{N} \otimes_A \boldsymbol{.})$ étant exact à droite, il est exact à gauche si et seulement si $H^3_*\mathcal{N}$ est plat sur $A$).

**Définition 2.3.** *Un faisceau sur $\mathbf{P}^3_A$ vérifiant les conditions équivalentes de 2.1 est appelé un faisceau* **triadique**.

Un faisceau dissocié est évidemment triadique. Une somme directe de faisceaux triadiques est triadique.

*b) Triades et faisceaux triadiques.*

Dans ce paragraphe nous montrons qu'il y a une correspondance entre triades majeures et faisceaux triadiques.

**Proposition 2.4.** *(Triade associée à un faisceau triadique) Soit $\mathcal{N}$ un faisceau triadique et soit*

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0 \tag{1}$$

*une suite exacte comme en 2.1. Alors, si on pose $L_i = H^0_*(\mathcal{L}_i)$ :*
*1) le complexe $L_{\boldsymbol{.}} = (L_1 \to L_0 \to L_{-1})$ déduit de (1) est une triade majeure de noyau $N = H^0_*(\mathcal{N})$,*
*2) si on note $H$ et $C$ le cœur et le conoyau de $L_{\boldsymbol{.}}$ et $V_{L_{\boldsymbol{.}}}$ le foncteur associé (cf. 1.3), on a*

$$H^1_*(\mathcal{N} \otimes_A \boldsymbol{.}) = h_0(L_{\boldsymbol{.}} \otimes_A \boldsymbol{.}) = V_{L_{\boldsymbol{.}}}, \quad \text{en particulier, on a } H = H^1_*\mathcal{N},$$

$$H^2_*(\mathcal{N} \otimes \boldsymbol{.}) = C \otimes_A \boldsymbol{.}, \quad \text{en particulier, on a } C = H^2_*\mathcal{N},$$

*3) le dual de $N$ sur $R_A$ : $N^\vee = \mathrm{Hom}_{R_A}(N, R_A)$, est égal à $H^0_*(\mathcal{N}^\vee)$ et on a une suite exacte de $R_A$-modules :*

$$0 \to L^\vee_{-1} \to L^\vee_0 \to L^\vee_1 \to N^\vee \to 0,$$

*4) si on a deux suites exactes du type (1) correspondant au même faisceau $\mathcal{N}$, les triades associées sont isomorphes à homotopie près,*
*5) on a $\mathrm{Ext}^1_{R_A}(N, R_A) \simeq H^1_*\mathcal{N}^\vee \simeq C^*(4)$. Si on suppose $A$ intègre, $\mathrm{Ext}^1_{R_A}(N, R_A)$ est nul si et seulement si $C = H^2_*(\mathcal{N})$ est de torsion. Autrement dit, $L_{\boldsymbol{.}}$ est élémentaire (cf. 1.28) si et seulement si $\mathcal{N}$ est extraverti (cf. [HMDP1] 2.6).*

**Démonstration.** Montrons d'abord 2). On coupe la suite exacte (1) en deux : $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{K} \to 0$ et $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_1 \to 0$. En tenant compte du fait que $H^0_*(\mathcal{L}_i \otimes \boldsymbol{.}) = H^0_*(\mathcal{L}_i) \otimes \boldsymbol{.}$ car $\mathcal{L}_i$ est dissocié on voit qu'on a $H^2_*(\mathcal{N} \otimes \boldsymbol{.}) = H^1_*(\mathcal{K} \otimes \boldsymbol{.}) = C \otimes \boldsymbol{.}$ et $H^1_*(\mathcal{N} \otimes_A \boldsymbol{.}) = h_0(L_{\boldsymbol{.}} \otimes_A \boldsymbol{.})$. Comme $\mathcal{N}$ est localement libre, $H = H^1_*(\mathcal{N})$ et $C = H^2_*(\mathcal{N})$ sont de type fini sur $A$, de sorte que $L_{\boldsymbol{.}}$ est bien une triade.

Pour le point 3) rappelons tout d'abord que si $A$ est un anneau noethérien et $M$ un $R_A$-module gradué de type fini sur $A$ on a $\mathrm{Ext}^i_{R_A}(M, R_A) = 0$ pour $0 \leq i \leq 3$ (cf. [E] 18.4 : il suffit de noter que l'annulateur de $M$ contient une suite régulière de la forme $(X^r, Y^r, Z^r, T^r)$ pour $r$ assez grand).

Considérons la triade $L_{\bullet} = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ et posons $B = \operatorname{Im} d_1$, $Z = \operatorname{Ker} d_0$, $K = \operatorname{Im} d_0$. On a les suites exactes $0 \to N \to L_1 \to B \to 0$, $0 \to B \to Z \to H \to 0$, $0 \to Z \to L_0 \to K \to 0$ et $0 \to K \to L_{-1} \to C \to 0$. Comme $H$ et $C$ sont de type fini sur $A$, le rappel ci-dessus montre qu'on a $\operatorname{Ext}^i_{R_A}(H, R_A) = \operatorname{Ext}^i_{R_A}(C, R_A) = 0$ pour $i \leq 3$ et on en déduit $\operatorname{Ext}^1_{R_A}(B, R_A) = \operatorname{Ext}^1_{R_A}(Z, R_A) = \operatorname{Ext}^2_{R_A}(K, R_A) = \operatorname{Ext}^3_{R_A}(C, R_A) = 0$ et $\operatorname{Ext}^1_{R_A}(K, R_A) = \operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, R_A) = 0$. En définitive on a la suite exacte sur les modules duaux :

$$0 \to L_{-1}^{\vee} \xrightarrow{d_0^{\vee}} L_0^{\vee} \xrightarrow{d_1^{\vee}} L_1^{\vee} \to N^{\vee} \to 0.$$

Pour 4), on a les deux triades $L_{\bullet}$ et $L'_{\bullet}$ et il résulte de 3) que $L_{\bullet}^{\vee}$ et $L'^{\vee}_{\bullet}$ sont deux résolutions libres de $N^{\vee}$, donc isomorphes à homotopie près, donc aussi $L_{\bullet}$ et $L'_{\bullet}$.

Montrons le point 5) : comme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ n'a pas de $H^1$, on a $\operatorname{Ext}^1_{R_A}(N, R_A(n))^0 = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n))$ et ce dernier terme n'est autre que $H^1\mathcal{N}^{\vee}(n)$ en vertu de [AG] 6.3 et 6.7. On a aussi $H^1_*\mathcal{N}^{\vee} = H^2_*\mathcal{K}^{\vee}$ et la suite exacte $0 \to H^2_*\mathcal{K}^{\vee} \to H^3_*\mathcal{L}^{\vee}_{-1} \xrightarrow{u} H^3_*\mathcal{L}^{\vee}_0$. Mais, on a vu (cf. 0.1) qu'on a $H^3_*\mathcal{L}_i^{\vee} \simeq (L_i(-4))^*$ et la suite exacte $L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1} \to C \to 0$ montre par dualité que $\operatorname{Ker} u$ n'est autre que $C^*(4)$. On suppose $A$ intègre. Si $C$ est de torsion on a $C^* = 0$. Réciproquement, si $C^*$ est nul on a $C^{**} = 0$, donc la flèche $C \to C^{**}$ est nulle ce qui implique que $C$ est de torsion.

**Proposition 2.5.** *(Faisceau triadique associé à une triade majeure)*
*Soit $L_{\bullet}$ une triade majeure, $N$ son noyau, $\mathcal{N}$ le faisceau associé. Alors, $\mathcal{N}$ est triadique. Cette opération définit un foncteur de la catégorie des triades majeures munie des morphismes de complexes à homotopie près dans celle des faisceaux triadiques sur $\mathbf{P}^3_A$ et ce foncteur est une équivalence de catégories.*

**Démonstration.** Si on pose $L_{\bullet} = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$, le fait que $H$ et $C$ soient de type fini sur $A$ implique que les faisceaux associés sont nuls, d'où l'exactitude de la suite

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\widetilde{d_1}} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\widetilde{d_0}} \mathcal{L}_{-1} \to 0,$$

qui montre que $\mathcal{N}$ est triadique, puisque les $L_i$ et donc les $\mathcal{L}_i$ sont dissociés.

Il est clair que cette correspondance est fonctorielle et c'est encore vrai à homotopie près, puisque deux morphismes de complexes homotopes induisent la même application sur l'homologie et en particulier sur le $h_1$. Le fait que ce foncteur soit surjectif vient de 2.4.

Si $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ est un morphisme de faisceaux, il induit $f^{\vee} : \mathcal{N}'^{\vee} \to \mathcal{N}^{\vee}$ et, en passant aux sections globales, $H^0_* f^{\vee} : N'^{\vee} \to N^{\vee}$. Comme $L_{\bullet}^{\vee}$ et $L'^{\vee}_{\bullet}$ sont des résolutions projectives de $N^{\vee}$ et $N'^{\vee}$ (cf. 2.4.3), $H^0_* f^{\vee}$ se relève en un morphisme de $L'^{\vee}_{\bullet}$ dans $L_{\bullet}^{\vee}$ qui donne, par dualité, le morphisme de triades cherché.

Si deux morphismes $f, g : L_{\bullet} \to L'_{\bullet}$ donnent le même morphisme $\mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, ils donnent aussi le même morphisme $N'^{\vee} \to N^{\vee}$ et, comme $L_{\bullet}^{\vee}$ et $L'^{\vee}_{\bullet}$ sont des résolutions projectives de $N^{\vee}$ et $N'^{\vee}$, $f^{\vee}$ et $g^{\vee}$ sont homotopes, donc aussi $f$ et $g$.

*c) Pseudo-isomorphismes.*

Rappelons la définition des pseudo-isomorphismes de faisceaux dans le cas des faisceaux localement libres (cf. [HMDP1] 2.1 et 2.2.0) :

**Définition 2.6.** *Un morphisme $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ de faisceaux localement libres est appelé un* **pseudo-isomorphisme** *(en abrégé un psi) s'il induit :*
*1) un isomorphisme de foncteurs $H^1_*(\mathcal{N} \otimes_A \boldsymbol{.}) \to H^1_*(\mathcal{N}' \otimes_A \boldsymbol{.})$,*
*2) un monomorphisme de foncteurs $H^2_*(\mathcal{N} \otimes_A \boldsymbol{.}) \to H^2_*(\mathcal{N}' \otimes_A \boldsymbol{.})$.*
*Deux faisceaux sont dits pseudo-isomorphes s'il existe une chaîne de psi qui les joint.*

Dans la correspondance étudiée au paragraphe précédent, les *psi* de triades et de faisceaux se correspondent :

**Proposition 2.7.** *Soit $u : L_{\boldsymbol{.}} \to L'_{\boldsymbol{.}}$ un morphisme de triades majeures et $\widetilde{u} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ le morphisme correspondant sur les faisceaux triadiques. Alors $u$ est un psi si et seulement si $\widetilde{u}$ est un psi c'est-à-dire si et seulement si on a les deux conditions suivantes :*
*a) $\widetilde{u}$ induit un isomorphisme $H^1_*(\mathcal{N}) \to H^1_*(\mathcal{N}')$,*
*b) $\widetilde{u}$ induit une injection $H^2_*(\mathcal{N}) \to H^2_*(\mathcal{N}')$ à quotient plat sur $A$.*

**Démonstration.** La première assertion résulte de 2.4 et la seconde de 1.16.

**Remarque 2.8.** Il résulte de 2.7 et 1.22 que si deux triades majeures sont pseudo-isomorphes il en est est de même des faisceaux associés. La réciproque est vraie, cf. 2.14, mais pas immédiate. En effet, si on a une chaîne de *psi* de faisceaux dont les extrémités sont triadiques, les faisceaux intermédiaires ne le sont pas nécessairement, de sorte qu'on ne peut pas appliquer 2.7.

Rappelons la caractérisation suivante des *psi* de faisceaux (cf. [HMDP1] 2.4) :

**Proposition 2.9.** *Soit $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ un morphisme de faisceaux localement libres. Alors, $f$ est un psi si et seulement si il existe un faisceau dissocié $\mathcal{L}$ et un morphisme $p : \mathcal{L} \to \mathcal{N}'$ tel que l'on ait une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{N} \oplus \mathcal{L} \xrightarrow{(f,p)} \mathcal{N}' \to 0$$

*avec $\mathcal{S}$ dissocié.*

**Corollaire 2.10.** *Soit $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ un pseudo-isomorphisme de faisceaux triadiques qui induit un* **isomorphisme** *de foncteurs $H^2_*(\mathcal{N} \otimes_A \boldsymbol{.}) \to H^2_*(\mathcal{N}' \otimes_A \boldsymbol{.})$. Alors, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont stablement isomorphes.*

**Démonstration.** En vertu de 2.9 on a une suite exacte $0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{N} \oplus \mathcal{L} \xrightarrow{(f,p)} \mathcal{N}' \to 0$ et il suffit de montrer que cette suite est scindée. Cette suite correspond à un éléments $\xi \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{N}', \mathcal{S})$ et il s'agit de montrer que cet élément est nul, ou encore que le morphisme $\varphi : \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{N}', \mathcal{S}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{N} \oplus \mathcal{L}, \mathcal{S}) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{N}, \mathcal{S})$ induit par $f$ est injectif. Ce morphisme est encore égal au morphisme $H^1(\mathcal{N}'^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}} \mathcal{S}) \to H^1(\mathcal{N}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}} \mathcal{S})$ induit par $f$ et c'est la valeur en $A$ du morphisme de foncteurs

$$\Phi : H^1(\mathcal{N}'^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}} \mathcal{S} \otimes_A \boldsymbol{.}) \to H^1(\mathcal{N}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}} \mathcal{S} \otimes_A \boldsymbol{.}).$$

Par la dualité de Serre exprimée en termes de foncteurs cohérents, cf. [H] 7.4, $\Phi$ est dual du morphisme $\Phi^{\vee} : H^2(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}} \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}} \omega_{\mathcal{C}/T} \otimes_A \boldsymbol{.}) \to H^2(\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}} \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}} \omega_{\mathcal{C}/T} \otimes_A \boldsymbol{.})$. Comme $\mathcal{S}$ et $\omega_{\mathcal{C}/T} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-4)$ sont dissociées ce dernier morphisme est somme de certains composants du morphisme $H^2_*(\mathcal{N} \otimes_A \boldsymbol{.}) \to H^2_*(\mathcal{N}' \otimes_A \boldsymbol{.})$ qui est un isomorphisme par hypothèse, d'où la conclusion.

*d) Le lemme de Verdier inverse pour les faisceaux triadiques.*

Nous avons montré dans [HMDP1] 2.11 le lemme (dit de Verdier) suivant :

*Soient $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}''$ des faisceaux localement libres sur $\mathbf{P}^3_A$ pseudo-isomorphes. Il existe un faisceau localement libre $\mathcal{N}_0$ et des psi : $\mathcal{N}' \leftarrow \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{N}''$.*

Le lemme analogue avec des faisceaux triadiques n'est pas vrai, mais on a le résultat suivant en sens inverse, comme dans le cas des triades (cf. 1.22) :

**Théorème 2.11.** *Soient $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}''$ des faisceaux triadiques sur $\mathbf{P}^3_A$ pseudo-isomorphes. Il existe un faisceau triadique $\mathcal{N}$ et des psi : $\mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N}''$.*

La démonstration de ce théorème nécessite quelques étapes. Le premier lemme montre comment construire des faisceaux triadiques par une technique de désaturation. Cette technique sera utilisée au chapitre 3 pour montrer l'existence de résolutions de type $E$ et $N$ triadiques.

**Lemme 2.12.** *(Lemme de désaturation) Soit $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux cohérents sur $\mathbf{P}^3_A$. On suppose $\mathcal{E}$ localement libre, $\mathcal{F}$ dissocié et $\mathcal{G}$ plat sur $A$. Il existe des faisceaux $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ tels que $\mathcal{E}'$ soit dual d'un faisceau triadique, que $\mathcal{F}'$ soit dissocié et qu'on ait un diagramme commutatif de suites exactes, où $f$ est dual d'un psi :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{E}' & \rightarrow & \mathcal{F}' & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & 0. \end{array}$$

**Démonstration.**

Notons d'abord que, comme $\mathcal{E}$ est localement libre, on a $\mathcal{E}xt^{\,i}_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_\mathbf{P}) = 0$ pour $i \geq 1$.

Soit $G$ l'image de $F = H^0_*\mathcal{F}$ dans $H^0_*\mathcal{G}$. On sait que pour $n$ grand, on a $G_n = H^0\mathcal{G}(n)$. Soit $n_0$ un entier, tel que cette condition soit réalisée pour $n \geq n_0$, et tel que le foncteur $H^0(\mathcal{G}(n) \otimes_A \boldsymbol{.})$ soit exact pour $n \geq n_0$ (un tel entier existe en vertu des théorèmes de cohomologie et changement de base, cf. [AG] III 12.11). Posons $G' = \bigoplus_{n \geq n_0} H^0\mathcal{G}(n)$. On a donc $G' \subset G$ et $G'$ est obtenu à partir de $G$ par "désaturation". Soit $F' \rightarrow G'$ le début d'une résolution libre minimale de $G'$. L'inclusion de $G'$ dans $G$ se relève en un morphisme $F' \rightarrow F$. Si $E'$ est le noyau de $F' \rightarrow G'$ on obtient le diagramme annoncé en passant aux faisceaux associés.

Il reste à montrer que $\mathcal{E}'$ est dual d'un faisceau triadique et que $f$ est dual d'un *psi*. On note que $\mathcal{E}'$ est plat sur $A$ car $\mathcal{G}$ l'est et qu'on a $\mathcal{E}xt^{\,i}_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{E}', \mathcal{O}_\mathbf{P}) = 0$ pour $i \geq 1$, ce qui montre déjà que $\mathcal{E}'$ est localement libre.

On vérifie ensuite que $f$ est dual d'un *psi*. Comme $\mathcal{G}$ est plat les suites exactes du diagramme ci-dessus restent exactes en tensorisant par un $A$-module $Q$. Le diagramme obtenu en déroulant les suites de cohomologie donne la conclusion.

Montrons enfin que le foncteur $H^0_*(\mathcal{E}' \otimes_A \boldsymbol{.})$ est exact à droite. Il suffit de le voir pour les foncteurs $H^0(\mathcal{E}'(n) \otimes_A \boldsymbol{.})$ pour tout $n$. Comme $\mathcal{G}$ est plat sur $A$ on a la suite exacte de foncteurs $0 \to \mathcal{E}'(n) \otimes_A \bullet \to \mathcal{F}'(n) \otimes_A \bullet \to \mathcal{G}(n) \otimes_A \bullet \to 0$. Pour $n \leq n_0$, comme $F'$ est une résolution minimale de $G'$ on a $F'_n = 0$ et on en déduit $H^0(\mathcal{E}'(n) \otimes_A \bullet) = 0$. Pour $n \geq n_0$, comme $H^0(\mathcal{G}(n) \otimes_A \bullet)$ commute au changement de base et comme $F'_n \to G'_n$ est surjectif on a la suite exacte de foncteurs

$$0 \to H^0(\mathcal{E}'(n) \otimes_A \bullet) \to H^0(\mathcal{F}'(n) \otimes_A \bullet) \to H^0(\mathcal{G}(n) \otimes_A \bullet) \to 0$$

et il en résulte que $H^0(\mathcal{E}'(n) \otimes_A \bullet)$ est exact à droite (car $H^0(\mathcal{F}'(n) \otimes_A \bullet)$ l'est).

**Corollaire 2.13.**
*1) Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre. Il existe un faisceau dual d'un faisceau triadique $\mathcal{E}'$ et un morphisme $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ qui est dual d'un* psi.
*2) Soit $\mathcal{N}$ un faisceau localement libre. Il existe un faisceau triadique $\mathcal{N}'$ et un* psi *$\mathcal{N} \to \mathcal{N}'$. En particulier, la classe de pseudo-isomorphisme d'un faisceau localement libre contient un faisceau triadique.*

**Démonstration.** Par dualité il suffit de prouver l'assertion avec $\mathcal{E}$. En vertu de 2.12 il suffit d'insérer $\mathcal{E}$ dans une suite exacte $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ avec $\mathcal{F}$ dissocié et $\mathcal{G}$ plat. Pour cela on considère $\mathcal{E}^\vee$, on prend le début d'une résolution minimale de $N = H^0_*\mathcal{E}^\vee$ : $0 \to G^\vee \to F^\vee \to N \to 0$, avec $F^\vee$ libre, on passe aux faisceaux associés et on dualise.

Nous pouvons maintenant montrer le lemme de Verdier inverse 2.11. On commence par prendre un faisceau localement libre $\mathcal{N}_0$ et des *psi* : $\mathcal{N}' \leftarrow \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N}''$ (cf. [HMDP1] 2.11). On en déduit par dualité une flèche $\mathcal{N}'^\vee \oplus \mathcal{N}''^\vee \to \mathcal{N}_0^\vee$. On rajoute un faisceau dissocié $\mathcal{P}$ de sorte que la flèche $\mathcal{P} \oplus \mathcal{N}'^\vee \oplus \mathcal{N}''^\vee \to \mathcal{N}_0^\vee$soit surjective. Soit $\mathcal{E}$ le noyau de cette flèche. C'est un faisceau localement libre et si on pose $\mathcal{N} = \mathcal{E}^\vee$ on a la suite exacte de faisceaux localement libres :

(1) $$0 \to \mathcal{N}_0 \to \mathcal{P}^\vee \oplus \mathcal{N}' \oplus \mathcal{N}'' \xrightarrow{(u,\pi',\pi'')} \mathcal{N} \to 0.$$

Nous allons montrer que $\pi'$ et $\pi''$ sont des *psi*, ce qui, avec 2.13 établira le théorème.

La suite (1) reste exacte en tensorisant par un $A$-module $Q$, de sorte qu'elle donne naissance à une suite exacte de foncteurs :

$$\begin{aligned} \cdots \to H^1(\mathcal{N}_0 \otimes_A \bullet) &\xrightarrow{{}^t(j',j'')} H^1(\mathcal{N}' \otimes_A \bullet) \oplus H^1(\mathcal{N}'' \otimes_A \bullet) \xrightarrow{(p',p'')} H^1(\mathcal{N} \otimes_A \bullet) \xrightarrow{v} \\ H^2(\mathcal{N}_0 \otimes_A \bullet) &\xrightarrow{{}^t(k',k'')} H^2(\mathcal{N}' \otimes_A \bullet) \oplus H^2(\mathcal{N}'' \otimes_A \bullet) \xrightarrow{(q',q'')} H^2(\mathcal{N} \otimes_A \bullet) \to \cdots \end{aligned}$$

dans laquelle les flèches $j'$ et $j''$ sont des isomorphismes et $k'$ et $k''$ des monomorphismes. On en déduit d'abord qu'on a $v = 0$, puis que $p'$ et $p''$ sont des isomorphismes et enfin que $q'$ et $q''$ sont des monomorphismes, donc que $\pi'$ et $\pi''$ sont des *psi*.

Le corollaire suivant (qui va donner le théorème de Rao, cf. 3.9) montre que la correspondance entre triades majeures et faisceaux triadiques se comporte bien vis à vis de la relation de pseudo-isomorphisme, cf. remarque 2.8 :

**Corollaire 2.14.** *Soient $L'_\bullet$ et $L''_\bullet$ deux triades majeures et $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}''$ les faisceaux triadiques associés. Alors, $L'_\bullet$ et $L''_\bullet$ sont pseudo-isomorphes si et seulement si $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}''$ le sont.*

**Démonstration.** Cela résulte de 2.7 et 2.11.

*e) Le cas d'un anneau de valuation discrète.*

Dans ce paragraphe nous supposons que $A$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante $a$. Rappelons, cf. [HMDP1] 2.6, qu'un faisceau localement libre $\mathcal{N}$ est dit extraverti s'il vérifie $H^1_*\mathcal{N}^\vee = 0$.

**Proposition 2.15.** *Soit $A$ un anneau de valuation discrète et soit $\mathcal{N}$ un faisceau localement libre extraverti. Alors $\mathcal{N}$ est triadique. La classe de pseudo-isomorphisme de tout faisceau localement libre contient un unique faisceau extraverti (donc triadique) minimal, i.e. sans facteur direct dissocié. Un tel faisceau sera dit* **élémentaire***. La triade associée est élémentaire.*

**Démonstration.** Posons $M = H^0_*\mathcal{N}^\vee$ et considérons une présentation minimale de $M$ : $0 \to M_2 \to L_1 \to L_0 \xrightarrow{p} M \to 0$ avec $L_i$ libre. Soit $K$ le noyau de $p$. On a la suite exacte des faisceaux associés : $0 \to \mathcal{M}_2 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{N}^\vee \to 0$ et il s'agit de montrer que $\mathcal{M}_2$ est dissocié. Pour cela, en vertu de [H] 7.7, il suffit de montrer que les foncteurs $H^i_*(\mathcal{M}_2 \otimes_A \bullet)$ sont nuls pour $i = 1, 2$.

Par hypothèse $\mathcal{N}$ vérifie $H^1_*\mathcal{N}^\vee = 0$. On a donc aussi, si $\mathcal{K}$ est le faisceau associé à $K$, $H^2_*\mathcal{K} = 0$, d'où la suite exacte $0 \to H^3_*\mathcal{M}_2 \to H^3_*\mathcal{L}_1 \to H^3_*\mathcal{K} \to 0$. Comme $\mathcal{L}_1$ est dissocié, $H^3_*\mathcal{L}_1$ est plat, donc sans torsion et il en résulte que $H^3_*\mathcal{M}_2$ est sans torsion, donc plat, puisque $A$ est un anneau de valuation discrète. En vertu de [AG] III 12.11, il en résulte que $H^2_*(\mathcal{M}_2 \otimes_A \bullet)$ est exact à droite (c'est-à-dire que $H^2_*\mathcal{M}_2$ commute au changement de base). Mais, par construction, la flèche $p$ est surjective, donc on a $H^1_*\mathcal{K} = H^2_*\mathcal{M}_2 = 0$ et le foncteur $H^2_*(\mathcal{M}_2 \otimes_A \bullet)$ est nul. Toujours par [AG] III 12.11, il en résulte que $H^1_*(\mathcal{M}_2 \otimes_A \bullet)$ commute au changement de base. Mais, comme on a $K = H^0_*\mathcal{K}$, la surjectivité de la flèche $L_1 \to K$ montre qu'on a $H^1_*\mathcal{M}_2 = 0$, donc le foncteur correspondant est nul, cqfd.

Le faisceau $\mathcal{N}$ est donc à la fois extraverti et triadique. Quitte à lui retirer un éventuel facteur dissocié on peut le supposer minimal et il est alors unique dans sa classe de pseudo-isomorphisme, cf. [HMDP1] 2.14.

**Remarque 2.16.** On peut retrouver ce résultat avec les résultats du paragraphe 1. En vertu de [HMDP1] 2.16, il suffit de montrer que toute classe de pseudo-isomorphisme contient un faisceau triadique extraverti. En vertu de 2.13 elle contient un $\mathcal{N}$ triadique. Soit $L_\bullet$ la triade majeure associée. Il existe une triade élémentaire $M_\bullet$ avec un *psi* $M_\bullet \to L_\bullet$ (cf. 1.32). Le faisceau triadique $\mathcal{N}_0$ associé à $M_\bullet$ est tel que $H^2_*\mathcal{N}_0$ est de torsion (cf. 1.32.1 et 2.4.5), de sorte que $\mathcal{N}_0$ est extraverti et triadique.

## 3. Courbes et triades : les théorèmes de Rao.

*a) Résolutions de type E et N triadiques.*

**Théorème 3.1.** *Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes de $\mathbf{P}^3_A$.*
*1) Il existe une résolution de $\mathcal{C}$ de type E cotriadique, i.e. une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$$

*où $\mathcal{F}$ est dissocié et où $\mathcal{E}$ est dual d'un faisceau triadique.*
*2) Il existe une résolution de $\mathcal{C}$ de type N triadique, i.e., une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$$

*où $\mathcal{P}$ est un faisceau dissocié et $\mathcal{N}$ un faisceau triadique.*

**Démonstration.** Commençons par le type $E$. On sait (cf. [HMDP1] 2.20) qu'il existe une résolution de type $E$. Pour obtenir une résolution cotriadique il suffit d'appliquer le lemme de désaturation 2.12.

Passons au type $N$. Vu l'importance de ce cas, nous allons donner deux démonstrations de l'existence de la résolution, la première par liaison à partir de l'existence de la résolution de type $E$, l'autre, plus directe, en tronquant le complexe de Čech.

*Première démonstration*

On effectue une liaison élémentaire par une intersection complète globale $\mathcal{D}$ de degrés $s$ et $t$ qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. On prend une résolution de type $E$ cotriadique de $\mathcal{C}'$ obtenue par la méthode du lemme de désaturation. Précisément, on choisit un entier $n_0$ tel que pour $n \geq n_0$ le foncteur $H^1(\mathcal{E}(n) \otimes_A \boldsymbol{.})$ soit nul (cf. [AG] III 12.11), on pose $I = \bigoplus_{n \geq n_0} H^0 \mathcal{J}_{\mathcal{C}'}(n)$ et on prend un début de résolution libre $F$ de $I$ qui conduit à la suite exacte : $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{J}_{\mathcal{C}'} \to 0$. Soit

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s-t) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-t) \xrightarrow{g} \mathcal{J}_{\mathcal{D}} \to 0$$

la résolution de $\mathcal{D}$. L'inclusion $\mathcal{J}_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{J}_{\mathcal{C}'}$ fournit une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-t) \xrightarrow{f+g} \mathcal{J}_{\mathcal{C}'} \to 0.$$

Montrons que le faisceau $\mathcal{E}'$ est dual d'un triadique, c'est-à-dire que, pour tout $n$, le foncteur $H^0(\mathcal{E}'(n) \otimes_A \boldsymbol{.})$ est exact à droite. On a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-t) \to 0.$$

Pour $n \geq n_0$ on a $H^1(\mathcal{E}(n) \otimes_A \boldsymbol{.}) = 0$ et il en résulte que $H^0(\mathcal{E}'(n) \otimes_A \boldsymbol{.})$ est exact à droite (car c'est vrai pour $\mathcal{E}$ et pour les dissociés).

Par ailleurs, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s-t) \to \mathcal{E}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}'/\mathcal{D}} \to 0$$

et, pour $n < n_0$ on a $H^0(\mathcal{F}(n) \otimes_A \boldsymbol{.}) = 0$, donc $H^0(\mathcal{E}'(n) \otimes_A \boldsymbol{.}) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n-s-t)(n) \otimes_A \boldsymbol{.})$ et ce dernier foncteur est exact à droite.

Il résulte alors de [HMDP1] 2.25 que $\mathcal{C}$ admet une résolution de type $N$ dont le faisceau $\mathcal{N}$ est $\mathcal{E}'^{\vee}(-s-t) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-t)$ qui est triadique comme annoncé.

*Deuxième démonstration*

On considère le complexe de Čech de $\mathcal{J}_C$ :

$$\mathbf{R}\Gamma_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}} = (0 \to M^0 \xrightarrow{\delta^0} M^1 \xrightarrow{\delta^1} M^2 \xrightarrow{\delta^2} M^3 \to 0)$$

vu comme élément de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^+(R_A)$. Les modules $M^i$ sont plats sur $A$. On considère le complexe tronqué $\sigma_{\leq 2}(\mathbf{R}\Gamma_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}})$, cf. [RD] p. 69. Il s'agit du complexe

$M^\bullet = (M^0 \to M^1 \to \operatorname{Ker}\delta^2)$ et il calcule les groupes $H^i_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$ pour $i = 0,1,2$. Comme $M^3/\operatorname{Im}\delta^2 = H^3_*\mathcal{J}_\mathcal{C} = H^3_*\mathcal{O}_\mathbf{P}$ est plat sur $A$ il en est de même de $\operatorname{Ker}\delta^2$. Il en résulte que $M^\bullet$ calcule aussi les foncteurs $H^i_*(\mathcal{J}_\mathcal{C} \otimes_A \bullet)$ pour $i = 0,1,2$.

On choisit ensuite un entier $r$ assez petit pour que les foncteurs $H^0(\mathcal{J}_\mathcal{C}(n) \otimes_A \bullet) = H^1(\mathcal{J}_\mathcal{C}(n) \otimes_A \bullet)$ soient nuls pour $n \leq r$ (on dira que $r$ est convenable) et on considère le complexe $M^\bullet_{>r}$ tronqué cette fois par rapport à la graduation des $R_A$-modules. Les modules de cohomologie de ce complexe sont de type fini sur $R_A$, de sorte qu'en vertu de [AG] III 12.3 il existe un complexe $S^\bullet_r$ formé de modules libres de type fini tel que l'on ait $M^\bullet_{>r} = S^\bullet_r$ dans la catégorie dérivée. Ce complexe est formé de modules $S^i_r$ avec $i \leq 2$, mais, attention, il contient *a priori* des termes $S^i_r$ pour $i < 0$. La proposition suivante donne alors la conclusion voulue :

**Proposition 3.2.** *On reprend les notations ci-dessus : $\mathcal{C}$ est une famille de courbes, $M^\bullet = \sigma_{\leq 2}(\mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{J}_\mathcal{C})$ le complexe de Čech tronqué, $r$ un entier convenable et $S^\bullet_r$ un complexe formé de modules libres de type fini tel que l'on ait $M^\bullet_{>r} = S^\bullet_r$ dans la catégorie dérivée. On pose $L_1 = S^0$, $L_0 = S^1$ et $L_{-1} = S^2$.*
*1) Le complexe $L_{\bullet r} = (L_1 \to L_0 \to L_{-1})$ est une triade majeure.*
*2) Si $r$ et $r'$ sont deux entiers convenables avec $r' < r$ on a un psi naturel $u_{r,r'} : L_{\bullet r} \to L_{\bullet r'}$ de sorte que toutes les triades $L_{\bullet r}$ sont pseudo-isomorphes. Si on a trois entiers convenables avec $r'' < r' < r$ on a $u_{r,r'}u_{r',r''} = u_{r,r''}$ à homotopie près.*
*3) Soit $N$ le noyau de $L_{\bullet r}$ et soit $\mathcal{N}$ le faisceau associé. Il existe une résolution de type $N$ triadique de $\mathcal{C}$ : $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$.*

**Démonstration.** Montrons 1). Comme le complexe $L_{\bullet r}$ est formé de $R_A$-modules libres de type fini, il s'agit de voir que ses groupes d'homologie $h_0$ et $h_{-1}$ sont de type fini sur $A$. Pour $h_0$ c'est clair car les complexes considérés calculent tous $H^1_*(\mathcal{J}_\mathcal{C} \otimes_A \bullet)$. Le groupe $h_{-1}$ n'est autre que $(H^2_*\mathcal{J}_\mathcal{C})_{>r}$, donc de type fini sur $A$.

Pour le point 2), si on a $r' < r$ on a une inclusion $j_{r,r'} : M^\bullet_{>r} \subset M^\bullet_{>r'}$ qui est un *qis* et induit un *qis* $f_{r,r'} : S^\bullet_r \to S^\bullet_{r'}$ puis, en se limitant aux termes $S^0, S^1, S^2$, le *psi* $u_{r,r'}$ annoncé. Comme on a $j_{r,r'}j_{r',r''} = j_{r,r''}$ on en déduit la même relation pour $f$ et $u$, à homotopie près.

Passons au point 3). Le complexe $\mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$ calcule la cohomologie de $\mathcal{J}_\mathcal{C}$ de sorte que les complexes $M^\bullet$, $M^\bullet_{>r}$ et $S^\bullet_r$ calculent encore $H^0_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$. En passant à $L_\bullet$, c'est-à-dire en supprimant les termes de degré $< 0$ de $S^\bullet_r$, on a encore une surjection $h_1 L_\bullet = N \to H^0_*\mathcal{J}_\mathcal{C} = I_\mathcal{C}$. On en déduit une suite exacte de faisceaux $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$. Comme l'homologie de $L_\bullet$ en degrés 0 et $-1$ est de type fini sur $A$ on a la suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$ qui montre que les groupes d'homologie de $L_\bullet \otimes_A \bullet$ sont aussi les $H^i(\mathcal{N} \otimes_A \bullet)$. Il en résulte qu'on a $H^i(\mathcal{P} \otimes_A \bullet) = 0$ pour $i = 1,2$ ce qui prouve que $\mathcal{P}$ est dissocié en vertu de [H] 7.9. On a donc bien construit une résolution de type $N$ triadique de $\mathcal{C}$.

**Remarques 3.3.**
1) La méthode de construction de la résolution de type $E$ par désaturation et la deuxième méthode de construction de la résolution de type $N$ sont voisines car toutes deux font appel à un procédé de troncature. C'est d'ailleurs ce qui distingue les résolutions obtenues ainsi des résolutions (triadiques) de type $E$ et $N$ générales. En effet, dans le cas général

on voit que $H^1_*\mathcal{E}$ est un quotient (de type fini sur $A$) du $R_A$-module $H^0_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$ et $H^2_*\mathcal{N}$ un sous-$R_A$-module (de type fini sur $A$) de $H^2_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$, tandis que dans les constructions ci-dessus ce sont plus précisément des modules tronqués de la forme $(H^0_*\mathcal{J}_\mathcal{C})_{>r}$ et $(H^2_*\mathcal{J}_\mathcal{C})_{\leq r}$.
2) Il y a encore une autre méthode pour montrer l'existence des résolutions de type $N$ triadiques. Elle consiste à faire le même travail que dans 2.12 ci-dessus mais de manière duale en désaturant le module $\Omega_0 = H^0_*(\mathbf{P}_T, \omega_{\mathcal{C}/T})$ au lieu de désaturer $I_\mathcal{C}$.

**Proposition 3.4.** *Soient $r_1$ et $r_2$ deux résolutions de type E de $\mathcal{C}$. Il existe une résolution $r'$ de type E cotriadique avec des morphismes $r' \to r_1$ et $r' \to r_2$.*

**Démonstration.** Posons, pour $k = 1, 2$, $(r_k) = (0 \to \mathcal{E}_k \to \mathcal{F}_k \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0)$ et soit $I_k$ l'image du module libre $F_k$ dans $H^0_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$ de sorte que $I_1$ et $I_2$ sont contenus dans $I_\mathcal{C}$.

On applique encore la méthode du lemme de désaturation : on choisit un $J = \bigoplus_{n\geq n_0} H^0\mathcal{J}_\mathcal{C}(n)$ avec $n_0$ assez grand pour que le foncteur $H^1$ soit nul et pour que $J$ soit contenu dans les $I_k$ (il suffit que l'on ait $H^1\mathcal{E}_k(n) = 0$ pour $n \geq n_0$), puis on prend le début d'une résolution minimale $F' \to J \to 0$ et la suite de faisceaux associée à $0 \to E' \to F' \to J \to 0$ convient.

**Proposition 3.5.** *Soient $r_1$ et $r_2$ deux résolutions de type N de $\mathcal{C}$. Il existe une résolution $r'$ de type N triadique avec des morphismes $r_1 \to r'$ et $r_2 \to r'$.*

**Démonstration.** On effectue une liaison par une intersection complète $\mathcal{D}$ contenant $\mathcal{C}$ qui donne une famille $\mathcal{C}'$ de courbes (cf. [HMDP1] 1.4). Les résolutions de type $N$ de $\mathcal{C}$ donnent des résolutions de type $E$ de $\mathcal{C}'$ (cf. [HMDP1] 2.24). On applique alors 3.4 à ces résolutions et on obtient une résolution cotriadique de $\mathcal{C}'$ qui domine les autres, puis, par liaison (cf. [HMDP1] 2.25), la résolution de type $N$ triadique de $\mathcal{C}$ cherchée.

*b) Triade associée à une famille de courbes.*

La proposition suivante permet d'associer une triade à une famille de courbes. On notera, par rapport au cas d'un corps, que la triade en question n'est définie ici qu'à pseudo-isomorphisme près.

**Proposition-définition 3.6.** *Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes de $\mathbf{P}^3_A$ munie d'une résolution de type N triadique : $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$ et soit*

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$$

*une suite exacte associée au faisceau $\mathcal{N}$ (cf. 2.1). Alors, si on pose $L_i = H^0_*(\mathcal{L}_i)$ le complexe $L_\bullet = (L_1 \to L_0 \to L_{-1})$ déduit de (1) est une triade majeure qui est appelée une* **triade de Rao** *de $\mathcal{C}$. Elle est bien définie à psi près.*
*Le foncteur associé à toute triade de Rao de $\mathcal{C}$ est le foncteur $H^1_*(\mathcal{J}_\mathcal{C} \otimes_A \bullet)$ : il est appelé* **foncteur de Rao** *de $\mathcal{C}$.*
*On note $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ la* **classe de triades** *(pour la relation de pseudo-isomorphisme) qui contient les triades de Rao de $\mathcal{C}$.*

**Démonstration.** Il est clair que $L_\bullet$ est une triade majeure. Le fait que deux triades de Rao sont pseudo-isomorphes provient de [HMDP1] 2.18.3 et de 2.14 ci-dessus. L'assertion sur le foncteur associé résulte de l'isomorphisme $H^1_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet) \simeq H^1_*(\mathcal{J}_\mathcal{C} \otimes_A \bullet)$ et de 2.4.2.

On peut définir aussi par dualité une "cotriade" de Rao de $\mathcal{C}$ :

**Proposition-définition 3.7.** *Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes de $\mathbf{P}^3_A$ munie d'une résolution de type E cotriadique :* $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \to 0$ *et soit*

$$0 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_{-1} \to \mathcal{E} \to 0 \tag{2}$$

*une suite exacte associée au faisceau $\mathcal{E}$ (cf. 2.1). Alors, si on pose $M_i = H^3_*\mathcal{M}_i$, le complexe $M_\bullet = (M_1 \to M_0 \to M_{-1})$ est appelé une cotriade de Rao de $\mathcal{C}$. Elle est bien définie au dual d'un* psi *près.*

Le théorème suivant explicite le lien entre triade et cotriade associées à une famille de courbes :

**Théorème 3.8.** *Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes, $L_\bullet$ (resp. $M_\bullet$) une triade (resp. une cotriade) de Rao de $\mathcal{C}$. Alors, il existe un* psi *fort (de complexes) $\varphi : L_\bullet \to M_\bullet$.*

**Démonstration.** On utilise les notations de § 0 *d)*. On pose $X = \mathbf{P}^3_A$. Considérons des résolutions de type $E$ et $N$ de $\mathcal{C}$ comme en 3.6 et 3.7 ci-dessus avec les suites exactes (1) et (2). La suite (1) montre que le complexe $\mathcal{L}_\bullet = (\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1})$ (que nous considérerons comme un complexe en degrés $-1, 0, 1$ en inversant les indices) est égal à $\mathcal{N}[1]$ dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}(X)$. Si $\mathcal{N} \to \mathcal{I}_\bullet$ est une résolution injective on obtient un morphisme $\mathcal{L}_\bullet[-1] \to \mathcal{I}_\bullet$ qui est un *qis*. Cela fournit, par application du foncteur $\Gamma_*$ un morphisme

$$\alpha : L_\bullet[-1] = \Gamma_*\mathcal{L}_\bullet[-1] \to \Gamma_*\mathcal{I}_\bullet = \mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{N}$$

dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}(R_A)$.

Par ailleurs, il résulte de [HMDP1] 2.17.3 qu'il existe un faisceau dissocié $\mathcal{L}$ avec une suite exacte $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{L} \to \mathcal{N} \to 0$. Le triangle associé à cette suite exacte donne un morphisme $\beta_0 : \mathcal{N} \to \mathcal{E}[1]$ dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}(X)$ puis, par application de $\Gamma_*$, un morphisme dans $\mathcal{D}(R_A)$ :

$$\beta : \mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{N} \to \mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{E}[1]$$

qui induit, puisque $\mathcal{L}$ est dissocié, un épimorphisme de foncteurs $H^0_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet) \to H^1_*(\mathcal{E} \otimes_A \bullet)$, un isomorphisme $H^1_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet) \to H^2_*(\mathcal{E} \otimes_A \bullet)$, un monomorphisme $H^2_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet) \to H^3_*(\mathcal{E} \otimes_A \bullet)$.

On a, ensuite, l'isomorphisme de dualité vu en 0.5 :

$$\theta : \mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{E}[1] \to \mathbf{R}\mathrm{Homgr}_A(\mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{E}^\vee(-4), A)[-2].$$

De la même façon que ci-dessus, et avec les mêmes conventions de degrés, la suite duale de (2) donne un morphisme

$$\gamma_0 : \Gamma_*\mathcal{M}^\vee_\bullet(-4)[-1] \to \mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{E}^\vee(-4),$$

ou encore, en tenant compte de la dualité de Serre : $H^0_*\mathcal{M}^\vee_i(-4) \simeq (H^3_*\mathcal{M}_i)^*$ :

$$\gamma_0 : M^*_\bullet[-1] \to \mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{E}^\vee(-4),$$

et, par application de $\mathbf{R}\mathrm{Homgr}_A(\bullet, A)$, on obtient

$$\gamma : \mathbf{R}\mathrm{Homgr}_A(\mathbf{R}\Gamma_*\mathcal{E}^\vee(-4), A)[-2] \to \mathbf{R}\mathrm{Homgr}_A(M^*_\bullet[-1], A)[-2] = M_\bullet[-1]$$

la dernière égalité provenant du fait que $M^*_\bullet$ est formé de $R_A$-modules libres, donc est acyclique pour Homgr.

En définitive, en décalant de 1, on a un morphisme $\varphi = \gamma\theta\beta\alpha : L_\bullet \to M_\bullet$ dans $\mathcal{D}(R_A)$. *A priori*, ce morphisme est dans la catégorie dérivée mais, comme $L_\bullet$ est un complexe de $R_A$-modules libres de type fini, $\varphi$ est représenté par un morphisme de complexes, unique à homotopie près (cf. [RD] I 4.7 p. 46 en changeant injectif en projectif et en renversant le sens des flèches). De plus, ce morphisme est un *psi* fort. En effet, cela résulte du fait que $\theta$ est un isomorphisme, que $\alpha$ et $\gamma$ induisent des isomorphismes sur les foncteurs $h_1, h_0$ et $h_{-1}$ et des propriétés de $\beta$ énoncées ci-dessus.

*c) Le théorème de Rao pour les triades : fibres de $\Psi_A$.*

Un anneau $A$ étant donné, les résultats du paragraphe précédent permettent de définir une application $\Psi_A$ qui à une famille de courbes $\mathcal{C}$ associe la classe de triades $\mathcal{T}(\mathcal{C})$. Les théorèmes "de Rao" vont permettre de préciser l'image et les fibres de $\Psi_A$ lorsque l'anneau $A$ est local et son corps résiduel infini.

Dans [HMDP1] 3.2 nous avons montré le théorème suivant (généralisation aux familles de courbes du théorème de Rao, deuxième forme) :

**Théorème de Rao pour les faisceaux.** *On suppose $A$ local à corps résiduel infini. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux familles plates de courbes paramétrées par $A$, munies de résolutions de type N, avec des faisceaux $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$. Alors, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dans la même classe de biliaison si et seulement si $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont pseudo-isomorphes, à décalage près.*

En termes de triades, ce résultat permet de calculer les fibres de $\Psi_A$, ce qui généralise la première forme du théorème de Rao :

**Théorème 3.9.** *(Théorème de Rao pour les triades) On suppose $A$ local à corps résiduel infini. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux familles plates de courbes paramétrées par $A$ et soient $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ des triades de Rao de $\mathcal{C}$. Alors, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dans la même classe de biliaison si et seulement si les triades $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont pseudo-isomorphes, à décalage près (i.e. s'il existe un entier $h$ tel que l'on ait $\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C}')(h)$).*

**Démonstration.** Cela résulte du théorème de Rao rappelé ci-dessus, de 3.6 et de 2.14.

*d) Le théorème de Rao pour les triades : image de $\Psi_A$.*

Grâce aux résultats de [HMDP2] exprimés en termes de triades on peut montrer la généralisation de l'assertion de surjectivité (toujours à décalage près) du théorème de Rao (i.e. de l'application $\Psi_A$) :

**Théorème 3.10.** *On suppose $A$ local à corps résiduel infini. Soit $L_\bullet$ une triade. Il existe une famille de courbes $\mathcal{C}$ telle que la triade associée à $\mathcal{C}$ soit pseudo-isomorphe à $L_\bullet$, à décalage près.*

**Démonstration.** On peut supposer que $L_\bullet$ est une triade majeure. On prend le faisceau triadique associé $\mathcal{N}$ (cf. 2.5). En vertu de [HMDP2] 2.7 il existe une courbe $\mathcal{C}$ avec une résolution de type $N$ de la forme $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \to 0$ et cette courbe convient.

Plus précisément, le théorème suivant donne exactement l'image de $\Psi_A$ i.e. les décalages possibles :

**Théorème 3.11.** *On suppose $A$ local à corps résiduel infini. Soit $L_{\bullet}$ une triade, $\mathcal{T}$ sa classe de pseudo-isomorphisme, $\mathcal{N}$ un faisceau triadique associé et soit $\mathcal{N}_0$ le faisceau extraverti minimal (unique) de la classe de pseudo-isomorphisme de $\mathcal{N}$ (cf. [HMDP1] 2.14). Soit $q = q_{\mathcal{N}_0}$ la fonction $q$ de $\mathcal{N}_0$ (cf. [HMDP2] 2.4) et soit $h_0 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} nq(n) + \deg \mathcal{N}_0$.*
*1) Il existe une famille de courbes $\mathcal{C}_0$ et une résolution $0 \to \mathcal{P}_0 \to \mathcal{N}_0 \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}_0}(h_0) \to 0$ avec $\mathcal{P}_0$ dissocié. La classe de triade associée à $\mathcal{C}_0$ est égale à $\mathcal{T}(-h_0)$.*
*2) Si $\mathcal{C}_1$ est une famille de courbes telle que $\mathcal{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{T}(-h)$, on a $h \geq h_0$. Si $d$ et $g$ (resp. $d_0$ et $g_0$) sont respectivement le degré et le genre de $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_0$) on a $d \geq d_0$ et $g \geq g_0$.*
*3) Réciproquement, pour tout $h \geq h_0$ il existe une famille de courbes $\mathcal{C}_1$ avec $\mathcal{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{T}(-h)$.*
*4) Si de plus on a $h = h_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_0$ sont jointes par une déformation à cohomologie uniforme (cf. [HMDP2] 2.8) et triade constante.*
*On dit que $\mathcal{C}_0$ est une* **famille minimale** *de courbes.*
*Les autres familles de courbes de la classe de biliaison s'obtiennent à partir de $\mathcal{C}_0$ par des biliaisons élémentaires suivies d'une déformation à cohomologie uniforme et triade constante.*

**Démonstration.** Cela résulte de [HMDP2] 2.9 et 2.10 (Th. de Lazarsfeld-Rao). Dans le point 4), comme les familles $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ ont des résolutions de type $N$ avec les mêmes faisceaux $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ les triades associées sont les mêmes à *psi* près.

**Remarques 3.12.**
1) Ce théorème décrit exactement les familles de courbes minimales associées aux triades. Il généralise donc les résultats de [MDP1,3] qui traitaient ce problème pour les courbes sur un corps, à partir des modules de Rao. On notera que si deux triades sont pseudo-isomorphes elles correspondent à la même classe de biliaison de familles de courbes et, en particulier, ont même famille minimale, à déformation près.
2) Lorsque $A$ est un anneau de valuation discrète le faisceau $\mathcal{N}_0$ extraverti minimal est triadique et on peut le calculer explicitement à partir d'une triade donnée (cf. 1.32 et les exemples du §5). Il est caractérisé par le fait que $H^2_*\mathcal{N}$ est de torsion. Dans le cas d'un anneau local quelconque la détermination du faisceau extraverti minimal est plus problématique.

*e) Le cas de la liaison impaire.*

On a, grâce à la dualité, une caractérisation de la liaison impaire :

**Théorème 3.13.** *On suppose $A$ local à corps résiduel infini. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux familles plates de courbes paramétrées par $A$, et soient $L_{\bullet}$ et $L'_{\bullet}$ des triades de Rao de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Alors, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont liées par un nombre impair de liaisons élémentaires si et seulement si les triades $L_{\bullet}$ et $L'_{\bullet}$ sont duales à psi près et à décalage près, i.e. s'il existe un entier $h$ tel que $L_{\bullet}(h)$ soit pseudo-isomorphe à une triade duale de $L'_{\bullet}$.*

**Démonstration.** Supposons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ jointes par un nombre impair de liaisons et montrons que les triades associées sont duales, à décalage près. En vertu de 3.9 il suffit de traiter le cas d'une liaison par des surfaces de degrés $s$ et $t$. On considère des résolutions de type $N$ et $E$ de $\mathcal{C}$ et de type $N$ de $\mathcal{C}'$, avec les faisceaux respectifs $\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{N}'$. On sait, cf. [HMDP1] 2.24 qu'on peut prendre $\mathcal{E} = \mathcal{N}'^{\vee}(-s-t)$. On note $L_{\bullet}$ et $L'_{\bullet}$ les triades associées à $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ et $M_{\bullet}$ la cotriade associée à $\mathcal{E}$. En vertu de 0.2 on a $M_{\bullet} = (L'_{\bullet}(s+t-4))^*$ au sens des complexes. Le théorème de comparaison 3.8 ci-dessus fournit un *psi* fort $\varphi : L_{\bullet} \to M_{\bullet}$ et on conclut par 1.27.4.

Réciproquement, si les triades sont duales, on lie $\mathcal{C}$ à une famille $\mathcal{C}_1$. Le sens direct montre que les triades associées à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}'$ sont pseudo-isomorphes et on conclut avec 3.9 appliqué à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}'$.

**Remarque 3.14.** Si le corps résiduel $k$ de $A$ est fini les assertions d'existence 3.9, 3.10, 3.11 et 3.13 restent vraises à condition de remplacer éventuellement $A$ par un anneau local $B$ fini et étale sur $A$.

## 4. Courbes, faisceaux et triades : dictionnaire.

*a) Propriétés des triades et des foncteurs triadiques.*

Les propositions suivantes caractérisent deux types importants de triades :

**Proposition 4.1.** *Soit $L_{\bullet} = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ une triade, $H$ son cœur, $C$ son conoyau et $V$ le foncteur associé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*1) $V$ est exact à droite,*
*2) on a un isomorphisme de foncteurs $V \simeq H \otimes_A \bullet$,*
*3) $C$ est plat sur $A$,*
*4) $L_{\bullet}$ est pseudo-isomorphe à une triade de la forme $L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} 0$.*
*5) $L_{\bullet}$ est pseudo-isomorphe à une triade majeure (resp. mineure) de la forme $L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} 0$.*
*On dit alors que la triade est exacte à droite ou* **modulaire***.*

**Démonstration.** 1) $\Rightarrow$ 2). Soit $Q$ un $A$-module quelconque, on le résout par des $A$-modules libres : $F_1 \to F_0 \to Q \to 0$ et, comme $V$ est exact à droite, on en déduit la suite exacte $V(F_1) \to V(F_0) \to V(Q) \to 0$. Mais, comme $V$ est additif on a $V(F_i) = V(A) \otimes_A F_i$ d'où la conclusion puisque l'on a $H = V(A)$.

2) $\Longleftrightarrow$ 3). La platitude de $C$ est équivalente à la nullité de $\mathrm{Tor}\,^1_A(C, Q)$ pout tout $Q$ et la conclusion résulte du lemme 1.5.

3) $\Rightarrow$ 4). En vertu de 1.30 et 1.16 on se ramène au cas où $C$ est nul. Il suffit alors de remplacer $L_{\bullet}$ par $L_1 \xrightarrow{d_1} \mathrm{Ker}\, d_0$ (on notera que, comme $d_0 : L_0 \to L_{-1}$ est surjective et $L_{-1}$ plat sur $A$, il en est de même de $\mathrm{Ker}\, d_0$).

4) $\Rightarrow$ 5). Cela vient de 1.14 et 1.24.

5) $\Rightarrow$ 2) est clair et 2) $\Rightarrow$ 1) résulte de l'exactitude à droite du produit tensoriel.

**Proposition 4.2.** *Soit $L_{\bullet} = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ une triade, $H$ son cœur et $V$ le foncteur associé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*1) $V$ est exact à gauche,*
*2) il existe un $R_A$-module gradué $D$, de type fini sur $A$, tel que l'on ait un isomorphisme de foncteurs $V \simeq \mathrm{Homgr}\,_A(D, \bullet)$,*
*3) $E = \mathrm{Coker}\, d_1$ est plat sur $A$,*
*3') il existe une triade $L'_{\bullet} = (L'_1 \xrightarrow{d'_1} L'_0 \xrightarrow{d'_0} L'_{-1})$ pseudo-isomorphe à $L_{\bullet}$ telle que $E' =$*

$\mathrm{Coker}\, d_1'$ *soit plat sur* $A$,
*4)* $\mathrm{Ker}\, d_1$ *commute au changement de base, i.e., pour tout* $A$*-module de type fini* $Q$*, la flèche naturelle*

$$(\mathrm{Ker}\, d_1) \otimes_A Q \to \mathrm{Ker}\,(d_1 \otimes_A Q) \qquad \textit{est un isomorphisme,}$$

*5)* $L_{\bullet}$ *est pseudo-isomorphe à une triade de la forme* $0 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1}$,
*6)*$L_{\bullet}$ *est pseudo-isomorphe à une triade mineure* $P_{\bullet}$ *de la forme* $0 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} P_{-1}$.
*On dit alors que la triade est exacte à gauche ou* **représentable**.
*Si, de plus,* $A$ *est un anneau principal on peut remplacer dans 3) la platitude de* $\mathrm{Coker}\, d_1$ *par celle de* $H = h_0(L_{\bullet})$.

**Démonstration.** 1) $\Rightarrow$ 2). On considère une résolution injective de $Q$ : $0 \to Q \to I_0 \to I_1$. Comme le foncteur $V$ est exact à gauche on obtient la suite exacte $0 \to V(Q) \to V(I_0) \to V(I_1)$. Posons $D = h_0(L_{\bullet}^*)$ et $C' = h_{-1}(L_{\bullet}^*)$. On montre alors, comme pour 1.5, mais en renversant le sens des flèches, qu'on a, pour tout $A$-module $M$, la suite exacte (cf. aussi [H] 4.5)

$$0 \to \mathrm{Ext}\,_A^1(C', M) \to V(M) \to \mathrm{Homgr}\,_A(D, M) \to \mathrm{Ext}\,_A^2(C', M).$$

En appliquant cette suite à $M = I_k$ on voit que l'on a $V(I_k) = \mathrm{Homgr}\,_A(D, I_k)$ (car $I_k$ est injectif de sorte que les $\mathrm{Ext}\,^i$ sont nuls) et on en déduit $V(Q) = \mathrm{Homgr}\,_A(D, Q)$.

2) $\Rightarrow$ 1) est clair.

Soit $L_{\bullet}$ un complexe de $\mathcal{T}$. On a vu, cf. 1.4, que, si $d : E \to L_{-1}$ est la flèche induite par $d_0$, on a $V(Q) = \mathrm{Ker}\, d \otimes Q$. Si on a une injection $Q' \to Q$ de $A$-modules l'injectivité de $V(Q') \to V(Q)$ est alors équivalente à celle de $E \otimes_A Q' \to E \otimes_A Q$, donc à la platitude de $E$. Ceci montre 1) $\Rightarrow$ 3) et $3' \Rightarrow 1)$. Bien entendu 3) $\Rightarrow$ 3$'$) est clair.

Montrons l'équivalence de 3) et 4). Si on pose $B = \mathrm{Im}\, d_1$, la platitude de $E$ implique celle de $B$, donc équivaut aux relations $\mathrm{Tor}_A^1\,(E, Q) = \mathrm{Tor}_A^1\,(B, Q) = 0$ pour tout $A$-module $Q$ et l'application de $\centerdot \otimes_A Q$ à la suite exacte $0 \to \mathrm{Ker}\, d_1 \to L_1 \to B \to 0$ montre que ces conditions équivalent aussi à la commutation du noyau au produit tensoriel.

3) $\Rightarrow$ 5) est clair (il suffit de prendre le complexe $0 \to E \xrightarrow{d} L_{-1}$ qui est adéquat puisque $E$ est plat).

5) $\Rightarrow$ 6) se démontre en tronquant les complexes comme en 1.24 et 6) $\Rightarrow$ 3$'$) est clair.

Pour l'assertion supplémentaire, notons qu'on a la suite exacte $0 \to H \to E \to \mathrm{Im}\, d_0 \to 0$. Si l'anneau est principal, le module $\mathrm{Im}\, d_0$ qui est inclus dans $L_{-1}$ est sans torsion, donc plat, de sorte que la platitude de $E$ et celle de $H$ sont équivalentes.

**Définition 4.3.** *Une triade est dite exacte si elle est à la fois exacte à gauche et à droite. Une telle triade est modulaire et définie par un* $R_A$*-module* $H$ *plat sur* $A$.

**Remarques 4.4.**
1) Comme les propriétés 4.1 et 4.2 s'expriment en termes de foncteurs $V$, il est clair que si une triade est pseudo-isomorphe à une triade modulaire (resp. représentable, resp. exacte) elle est modulaire (resp. représentable, resp. exacte). Si $\mathcal{T}$ est une classe de triades pour la relation de pseudo-isomorphisme on dira que $\mathcal{T}$ est modulaire (resp. représentable, resp.

exacte) si l'une quelconque des triades de $\mathcal{T}$ l'est.
2) Si $L_\bullet$ et $M_\bullet$ sont deux triades duales, $L_\bullet$ est modulaire si et seulement si $M_\bullet$ est représentable (utiliser les caractérisations 4) et 6) de 4.1 et 4.2).

La proposition suivante montre que, dans le cas des triades modulaires ou représentables, le foncteur détermine la triade, si bien que la difficulté évoquée en 1.35.$c$ ne se produit pas.

**Proposition 4.5.** *Soient $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ deux triades modulaires (resp. représentables) et $V$ et $V'$ les foncteurs associés. On suppose $V$ et $V'$ isomorphes. Alors $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont pseudo-isomorphes.*

**Démonstration.** Dans le cas modulaire, posons $H = V(A)$ et $H' = V'(A)$. Ces modules sont isomorphes et $V$ et $V'$ sont tous deux isomorphes au foncteur $H \otimes_A \bullet$. On peut supposer que $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \to 0)$ et $L'_\bullet = (L'_1 \xrightarrow{d'_1} L'_0 \to 0)$ sont deux triades majeures. Les flèches $d_1$ et $d'_1$ donnent des présentations libres de $H$. On a alors une flèche $L_\bullet \to L'_\bullet$ qui est un pseudo-isomorphisme, d'où le résultat.

Le cas représentable résulte du cas modulaire par dualité (cf. 4.4.2 et 1.27).

*b) Le dictionnaire courbes-faisceaux-triades.*

L'énoncé suivant établit le lien entre les propriétés des familles de courbes (à spécialité constante, etc.), pour lesquelles on renvoie à [MDP1] VI, les propriétés des triades associées (exactitude à droite, etc.), et celles des faisceaux $\mathcal{E}$ et $\mathcal{N}$ des résolutions de type $E$ et $N$.

**Proposition 4.6.** *Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes, $L_\bullet$ une triade associé. Soient $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$ une résolution de type E et $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$ une résolution de type N triadique de $\mathcal{J}_\mathcal{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*1) $\mathcal{C}$ est à spécialité constante,*
*1') $H^2_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$ est plat sur $A$,*
*1") $H^1_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$ commute au changement de base,*
*2) $L_\bullet$ est une triade exacte à droite,*
*3) $H^2_*\mathcal{N}$ est plat sur $A$,*
*3') $H^1_*\mathcal{N}$ commute au changement de base,*
*4) $H^2_*\mathcal{E}$ commute au changement de base,*
*4') $H^3_*\mathcal{E}$ est plat sur $A$.*
*De plus, si $A$ est un anneau de valuation discrète et si le faisceau $\mathcal{N}$ est extraverti, la condition 3) est équivalente à $H^2_*\mathcal{N} = 0$.*

**Démonstration.** L'équivalence de *1)* et *1')* est claire par définition de la spécialité constante.

Pour toute famille de courbes $\mathcal{C}$, comme $H^3_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$ est plat (c'est $H^3_*\mathcal{O}_\mathbf{P}$) et commute au changement de base, $H^2_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$ commute au changement de base de sorte qu'on a l'équivalence de *1')* et *1")*. Comme le foncteur $V$ de la triade associée à $\mathcal{C}$ n'est autre que $H^1_*(\mathcal{J}_\mathcal{C} \otimes_A \bullet)$ (cf. 3.6), l'équivalence de *1")* et *2)* est claire.

On a un isomorphisme de foncteurs $H^1_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet) \simeq H^1_*(\mathcal{J}_\mathcal{C} \otimes_A \bullet)$ d'où l'équivalence de *3')* et *1")*. Comme $\mathcal{N}$ est triadique, $H^2_*\mathcal{N}$ commute au changement de base, et cette propriété est encore équivalente à *3)*.

Enfin l'équivalence de *1")* et *4)* est claire et *4')* en résulte aussitôt (car un $H^3$ commute toujours au changement de base).

Dans le cas extraverti, comme $H^2_*\mathcal{N}$ est de torsion, il est plat si et seulement si il est nul.

**Proposition 4.7.** *Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes, $L_\bullet$ une triade associée. Soient $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$ une résolution de type E cotriadique et $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$ une résolution de type N de $\mathcal{J}_\mathcal{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*1) $\mathcal{C}$ est à postulation constante*
*1') $H^0_*\mathcal{J}_\mathcal{C}$ commute au changement de base,*
*1") le foncteur $H^1_*(\mathcal{J}_\mathcal{C} \otimes_A \centerdot)$ est exact à gauche,*
*2) $L_\bullet$ est une triade exacte à gauche,*
*3) $H^0_*\mathcal{N}$ commute au changement de base,*
*4) $H^1_*\mathcal{E}$ commute au changement de base.*

**Démonstration.** L'équivalence de *1)* et *1')* résulte de la définition de la postulation constante. On voit aussitôt en tensorisant une suite exacte $0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0$, que cette condition équivaut à *1")* et donc à *2)* par définition de la triade associée (cf. 3.6).

Pour *3)* on a la suite exacte de foncteurs :

$$0 \to H^0_*(\mathcal{P} \otimes_A \centerdot) \to H^0_*(\mathcal{N} \otimes_A \centerdot) \to H^0_*(\mathcal{J}_\mathcal{C} \otimes_A \centerdot) \to 0$$

et, comme $H^0_*(\mathcal{P} \otimes_A \centerdot)$ est exact, on voit facilement que *1')* et *3)* sont équivalentes.

Pour *4)* on a la suite exacte de foncteurs :

$$0 \to H^0_*(\mathcal{E} \otimes_A \centerdot) \to H^0_*(\mathcal{F} \otimes_A \centerdot) \to H^0_*(\mathcal{J}_\mathcal{C} \otimes_A \centerdot) \xrightarrow{\varphi} H^1_*(\mathcal{E} \otimes_A \centerdot) \to 0$$

avec $H^0_*(\mathcal{E} \otimes_A \centerdot)$ exact (car $\mathcal{F}$ est dissocié) et, comme $\mathcal{E}$ est dual d'un triadique, $H^0_*(\mathcal{E} \otimes_A \centerdot)$ exact à droite et $H^1_*(\mathcal{E} \otimes_A \centerdot)$ exact à gauche. On coupe la suite exacte en deux en introduisant $F = \operatorname{Ker} \varphi$. La première suite exacte montre que $F$ est exact à droite et on conclut à l'équivalence de *1')* et de *4)* grâce à la deuxième suite exacte.

**Corollaire 4.8.** *Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes, $L_\bullet$ une triade associée. Soient $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$ une résolution de type E cotriadique et $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$ une résolution de type N de $\mathcal{J}_\mathcal{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*1) $\mathcal{C}$ est à cohomologie constante*
*2) $L_\bullet$ est une triade exacte,*
*3) $H^0_*\mathcal{N}$ est plat et commute au changement de base,*
*4) $H^2_*\mathcal{E}$ est plat et commute au changement de base.*

## 5. Construction de triades, application à la construction de familles de courbes.

Ce paragraphe, qui est essentiellement constitué d'exemples, a pour objectif essentiel de montrer comment on peut, en utilisant les triades, construire des familles de courbes gauches, paramétrées par un anneau de valuation discrète.([5])

Un bon fil conducteur pour le parcourir est l'exemple des courbes de degré 4 et genre 0 évoqué dans l'introduction. Dans ce cas, on sait, cf. [MDP4] ou [El], que le schéma de Hilbert $H_{4,0}$ est réunion de deux sous-schémas à cohomologie constante $H_1 = H_{\gamma_1,\rho_1}$ et $H_2 = H_{\gamma_2,\rho_2}$. Ces sous-schémas sont tous deux de dimension 16 et leurs adhérences sont les composantes irréductibles de $H_{4,0}$. La courbe générale $C_1$ de $H_1$ est une courbe de bidegré $(3,1)$ sur une quadrique, de module de Rao $k(-1)$. La courbe générale $C_2$ de $H_2$ est la réunion disjointe d'une cubique plane et d'une droite, avec un module de Rao du type de $R/(X,Y,Z,T^3)$, de dimensions $1,1,1$, en degrés $0,1,2$. Par semi-continuité, il est clair que $H_1$ est ouvert et $H_2$ fermé et la question est de savoir si $H_2$ est faiblement adhérent à $H_1$, i.e. si on a $\overline{H_1} \cap H_2 \neq \emptyset$, ou encore, s'il existe une famille de courbes $\mathcal{C}$, paramétrée par un anneau de valuation discrète $A$ dont le point générique est dans $H_1$ et le point spécial dans $H_2$. Nous allons voir que c'est bien le cas (cf. 5.21).

On sait, en vertu de 3.6, qu'à toute famille de courbes $\mathcal{C}$ est associée une triade, dont le foncteur associé mesure la variation du module de Rao dans $\mathcal{C}$ et le théorème de semi-continuité affirme que les dimensions du module de Rao au point générique sont inférieures à celles du module de Rao au point spécial. La proposition 5.8 ci-dessous précise la relation entre ces modules en montrant que, pour toute triade sur un anneau de valuation discrète, la valeur du foncteur $V$ associé au point générique est, à déformation près, un sous-quotient de la valeur de $V$ au point fermé.

Cette constatation étant faite, notre objectif est de parcourir le chemin en sens inverse.

Il s'agit d'abord, partant d'un sous-quotient, de construire une triade correspondant à ce sous-quotient. En général la construction se fait en deux étapes : on détermine le cœur $H$ et le conoyau $C$ de la triade souhaitée, puis on construit une extension $u$ de longueur 2 de $C$ par $H$. On reconstitue alors aisément la triade à partir de ces éléments, cf. §a). Dans chaque étape il n'y a pas unicité des constructions et des choix vont devoir être faits, avec des incidences sur les courbes obtenues.

Ensuite, avec l'algorithme développé dans [HMDP2], on construit les familles de courbes associées à cette triade, en commençant par les minimales et en effectuant des biliaisons si nécessaire.

Nous donnons plusieurs exemples construits selon cette procédure et une première analyse, sommaire, montrant comment les diverses étapes doivent être réalisées pour obtenir une famille de courbes de degré et genre donnés et dont la variation de la cohomologie est prescrite.

**Notation.** Dans ce qui suit on utilisera souvent la notation chiffrée suivante : le module

([5]) Une autre question fondamentale, que nous aborderons dans une étude ultérieure, est de montrer, au contraire, l'inexistence de certaines familles de courbes.

$\bigoplus_{i=1}^{r} R_A(-n_i)^{\alpha_i}$ sera noté $n_1^{\alpha_1}, \cdots, n_r^{\alpha_r}$. Pour éviter le risque de confusion avec le module nul on notera $\underline{0}$ le module $R_A$.

*a) Construction d'une triade à partir de son cœur, de son conoyau et d'une extension de longueur 2 de ces modules.*

Dans ce paragraphe $A$ désigne un anneau noethérien.

Si $L_{\bullet} = L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1}$ est une triade, on lui associe son cœur $H$, son conoyau $C$ et l'extension de $R_A$-modules

$$0 \to H \to E \xrightarrow{d} L_{-1} \to C \to 0,$$

dont la classe est un élément $u$ de $\operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, H)$, cf. 1.1. Nous montrons ci-dessous comment on peut, inversement, construire explicitement, à partir de $C, H, u$, une triade qui redonne ces éléments. Dans le cas où $A$ est un anneau de valuation discrète et $L_{\bullet}$ une triade majeure élémentaire la construction ci-dessous redonne la triade initiale à *psi* près.

On considère une résolution libre graduée de $C$ :

$$\cdots \to P_3 \xrightarrow{\delta_2} P_2 \xrightarrow{\delta_1} P_1 \xrightarrow{\delta_0} P_0 \to C \to 0 \tag{1}$$

et une résolution libre graduée de $H$ :

$$\cdots \to Q_1 \xrightarrow{\gamma} Q_0 \xrightarrow{p} H \to 0. \tag{2}$$

On désigne par $P_{\bullet}$ et $Q_{\bullet}$ les complexes obtenus à partir de ces suites exactes en oubliant les termes $C$ et $H$. Un élément $u$ de $\operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, H)$ correspond à un morphisme $\widehat{u} : P_2 \to H$ vérifiant $\widehat{u}\delta_2 = 0$ (modulo ceux qui proviennent de $P_1$). L'homomorphisme $\widehat{u}$ induit un morphisme de complexes $u_{\bullet} : P_{\bullet}[2] \to Q_{\bullet}$, avec des flèches $u_0 : P_2 \to Q_0$, $u_1 : P_3 \to Q_1$ etc. Soit $K_{\bullet}$ le cône du morphisme $u_{\bullet}$ et $L_{\bullet}$ le complexe obtenu en tronquant $K_{\bullet}$ en degrés $-1, 0, 1$. On a donc $L_{-1} = P_0$, $L_0 = P_1 \oplus Q_0$, $L_1 = P_2 \oplus Q_1$ et les flèches $d_0 = (\delta_0 \ 0)$ et $d_1 = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ u_0 & \gamma \end{pmatrix}$, avec le résultat suivant :

**Proposition 5.1.**
*1) Le complexe $L_{\bullet}$ construit ci-dessus est une triade majeure qui a pour conoyau $C$, pour cœur $H$ et dont l'élément de $\operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, H)$ associé est $u$. Cette triade est bien définie à un psi fort près. On la note $L_{\bullet}(C, H, u)$.*
*2) On suppose que est $A$ un anneau de valuation discrète. Soit $L_{\bullet}$ une triade majeure élémentaire et soient $C$, $H$ et $u$ le conoyau, le cœur et l'extension associés à $L_{\bullet}$. Alors, $L_{\bullet}$ et $L_{\bullet}(C, H, u)$ sont pseudo-isomorphes.*

**Démonstration.** 1) Par définition du cône on a la suite exacte de complexes : $0 \to Q_{\bullet} \to K_{\bullet} \to P_{\bullet} \to 0$ et la suite exacte d'homologie associée donne les isomorphismes cherchés. Des choix différents des résolutions de $C$ et $H$ ainsi que des relèvements $u_i$ définissent le même complexe $K_{\bullet}$ à *qis* près, de sorte que $L_{\bullet}$, qui est obtenu par troncature, est bien défini à un *psi* fort près.

Le point 2) résulte de 1.34.2.

**Remarques 5.2.**
1) On peut décrire explicitement l'extension de $C$ par $H$ associée à $u$. On considère le module $E$, somme amalgamée de $H$ et $P_1$ au-dessus de $P_2$, c'est-à-dire le module donné par la suite exacte :

$$P_2 \xrightarrow{(\widehat{u},\delta_1)} H \oplus P_1 \to E \to 0. \tag{3}$$

L'extension de longueur 2 définie par $u$ est alors :

$$0 \to H \to E \to P_0 \to C \to 0$$

et on obtient une triade pseudo-isomorphe à $L_\bullet(C, H, u)$ en juxtaposant $L_{-1} = P_0$ et une résolution $L_1 \to L_0 \to E \to 0$.
2) Au sens de la remarque précédente, la construction de la triade au moyen du cône de $u_\bullet$ effectuée ci-dessus consiste, pour résoudre $E$, à résoudre $H \oplus P_1$ par $Q_0 \oplus P_1$. Dans certains cas cette construction n'est pas la plus économique (en ce sens qu'elle donne des modules $L_i$ de rangs inutilement grands). On a en particulier le résultat suivant :

**Proposition 5.3.** *Avec les notations précédentes, on suppose que $u$ admet un relèvement $\widehat{u}$ surjectif et on appelle $\overline{u}$ l'homomorphisme de $\operatorname{Ker}\delta_0$ dans $H$ induit par $\widehat{u}$. On a alors une suite exacte $0 \to \operatorname{Ker}\overline{u} \to P_1 \to E \to 0$. On obtient une résolution $L_1 \to L_0 \to E \to 0$ en prenant $L_0 = P_1$ et pour $L_1$ le premier module d'une résolution de $\operatorname{Ker}\overline{u}$. La triade $L_1 \to L_0 \to P_0$ obtenue est pseudo-isomorphe à $L_\bullet(C, H, u)$.*

**Démonstration.** Cela résulte de la surjectivité de $\overline{u}$ et de la suite exacte (3) ci-dessus.

*b) Le cas d'un anneau de valuation discrète.*

Dans ce paragraphe $A$ désigne un anneau de valuation discrète d'uniformisante $a$ et de corps résiduel $k$ et on commence par montrer un résultat qui compare les groupes d'extensions sur $R$ et sur $R_A$.

**Proposition 5.4.**
*1) Soient $M'$ et $M''$ deux $R_A$-modules gradués annulés par $a$ (de sorte que ce sont aussi des $R$-modules). On a une suite exacte :*

$$\begin{aligned}\cdots \to \operatorname{Ext}^1_R(M'', M') &\xrightarrow{j_1} \operatorname{Ext}^1_{R_A}(M'', M') \xrightarrow{\psi_1} \operatorname{Hom}_R(M'', M')\\ \to \operatorname{Ext}^2_R(M'', M') &\xrightarrow{j_2} \operatorname{Ext}^2_{R_A}(M'', M') \xrightarrow{\psi_2} \operatorname{Ext}^1_R(M'', M') \to \cdots\end{aligned}$$

*2) Si, de plus, $A$ est une $k$-algèbre, les flèches $j_k$, pour $k \geq 1$, admettent des rétractions et on a pour tout $k \geq 1$ une suite exacte scindée :*

$$0 \to \operatorname{Ext}^k_R(M'', M') \xrightarrow{j_k} \operatorname{Ext}^k_{R_A}(M'', M') \xrightarrow{\psi_k} \operatorname{Ext}^{k-1}_R(M'', M') \to 0.$$

**Démonstration.** 1) On considère une résolution libre graduée de $M''$ sur $R_A$ :

$$\cdots \to L_2 \xrightarrow{\delta_1} L_1 \xrightarrow{\delta_0} L_0 \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

et on pose $K = \operatorname{Im}\delta_0$. En tensorisant par $k$ on obtient un complexe

$$\cdots \to \overline{L}_2 \xrightarrow{\overline{\delta}_1} \overline{L}_1 \xrightarrow{\overline{\delta}_0} \overline{L}_0$$

dont les seuls groupes d'homologie non nuls sont $M'' \otimes_A k$ en degré 0 et $\operatorname{Tor}_1^A(M'', k)$ en degré 1, qui sont tous deux isomorphes à $M''$ puisque $M''$ est annulé par $a$. Si on pose $\overline{K} = K \otimes_A k$ on a donc une suite exacte :

$$0 \to M'' \to \overline{K} \to \overline{L}_0 \xrightarrow{\overline{p}} M'' \to 0. \tag{4}$$

On pose $Z = \operatorname{Ker}\overline{p}$ et on note alors les faits suivants :
1) Pour $i \geq 1$ on a un isomorphisme

$$\operatorname{Ext}^i_{R_A}(K, M') \simeq \operatorname{Ext}^{i+1}_{R_A}(M'', M').$$

2) Comme $\cdots \overline{L}_2 \xrightarrow{\overline{\delta}_1} \overline{L}_1 \to \overline{K} \to 0$ est une résolution de $\overline{K}$ et comme on a, pour $i \geq 1$, un isomorphisme

$$\operatorname{Hom}_{R_A}(L_i, M') \simeq \operatorname{Hom}_R(\overline{L}_i, M')$$

(car $M'$ est annulé par $a$), on en déduit, pour $i \geq 0$ des isomorphismes :

$$\operatorname{Ext}^i_{R_A}(K, M') \simeq \operatorname{Ext}^i_R(\overline{K}, M').$$

3) La partie droite de la suite exacte (4) donne pour $i \geq 1$ les isomorphismes :

$$\operatorname{Ext}^{i+1}_R(M'', M') \simeq \operatorname{Ext}^i_R(Z, M').$$

La conclusion du point 1) s'obtient alors en écrivant la suite d'homologie associée à la partie gauche de (4) (avec une variante pour $k = 1$ que nous laissons au lecteur).

2) La flèche $j_k$ s'interprète en termes d'extensions : elle consiste simplement à considérer un $R$-module $M$ extension de $M''$ par $M'$ comme un $R_A$-module annulé par $a$. Si $A$ est une $k$-algèbre cette flèche admet une rétraction évidente qui consiste à considérer un $R_A$-module comme un $R$-module par restriction des scalaires, ce qui donne le point 2).

On reprend maintenant les notations du §*a)* dans le cas d'un anneau de valuation discrète.

Soit $u \in \operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, H)$. La fonctorialité du foncteur $\operatorname{Ext}^2$ appliquée aux morphismes canoniques $H \to H \otimes_A k$ et $\operatorname{Tor}_1^A(C, k) \to C$ donne un homomorphisme

$$\varphi : \operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, H) \to \operatorname{Ext}^2_{R_A}(\operatorname{Tor}_1^A(C, k), H \otimes_A k).$$

Comme les deux modules $H \otimes_A k$ et $\operatorname{Tor}_1^A(C, k)$ sont annulés par $a$ on a aussi le morphisme

$$\psi_2 : \operatorname{Ext}^2_{R_A}(\operatorname{Tor}_1^A(C, k), H \otimes_A k) \to \operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Tor}_1^A(C, k), H \otimes_A k)$$

défini en 5.4 ci-dessus. Si on pose $\theta = \psi_2\, \varphi$ on vérifie aisément le résultat suivant :

**Proposition 5.5.** *Soient $C, H$ des $R_A$-modules, $u \in \operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, H)$ et $L_\bullet = L_\bullet(C, H, u)$ la triade définie en 5.1. On note $V$ le foncteur associé à $L_\bullet$. Alors, la classe de $V(k)$ comme extension de $\operatorname{Tor}_1^A(C, k)$ par $H \otimes_A k$ (cf. 1.5) est égale à $\theta(u)$.*

*c) Sous-quotient associé à une triade.*

**Définition 5.6.** *Soit $k$ un corps et soient $M$ et $M_0$ deux $R$-modules gradués. On dit que $M$ est un* **sous-quotient** *de $M_0$ si $M$ est un quotient d'un sous-module gradué de $M_0$ (ou, ce qui revient au même, un sous-module d'un quotient de $M_0$). On note alors $M \triangleleft M_0$.*

Se donner $M$ comme sous-quotient de $M_0$ revient à se donner un drapeau de sous-modules : $M_1 \subset J \subset M_0$ avec $M = J/M_1$ ou encore un diagramme commutatif de suites exactes du type suivant :

$$
(M \triangleleft M_0) \qquad
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & M_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "l"] & M_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & J \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"] & M_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d] & M_{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M_0/M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_{-1} \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Il revient encore au même de se donner la suite exacte verticale $0 \to M_1 \to J \to M \to 0$ et le module $M_0$ comme extension de $J$ par $M_{-1}$.

**Définition 5.7.** *Soit $A$ un anneau de valuation discrète de corps résiduel $k$. On appelle* **déformation de sous-quotient** *la donnée d'un $R$-module $M_0$, d'un sous-quotient $M$ de $M_0$ et d'un $R_A$-module $M_A$ qui est une déformation plate de $M$ (i.e. un $R_A$-module, plat sur $A$ tel que l'on ait $M_A \otimes_A k = M$). Une telle donnée sera notée $M_A \sim M \triangleleft M_0$.*

**Proposition 5.8.** *Soient $A$ un anneau de valuation discrète, $K$ son corps des fractions et $k$ son corps résiduel. Soit $L_\bullet$ une triade sur $A$ (resp. une triade modulaire, resp. une triade représentable), $V$ le foncteur associé, $M_0 = V(k)$. Soient $H$ le cœur de $L_\bullet$ et $C$ son conoyau. On note $H_\tau$ le sous-module de $A$-torsion de $H$. Alors, le $R_A$-module gradué $M_A = H/H_\tau$ est plat sur $A$ et on a $M_A \otimes_A K = V(K)$ et $M_A \otimes_A k = M$, où $M$ est le sous-quotient (resp. le quotient, resp. le sous-module) de $M_0$ défini par le drapeau*

$$M_1 = H_\tau \otimes_A k \subset J = H \otimes_A k \subset M_0$$

*avec comme quotient* $M_{-1} = M_0/J = \operatorname{Tor}_1^A(C,k)$.
*On note* $\mathcal{D}(L_\bullet)$ *la déformation de sous-quotient ainsi obtenue et on dit que la triade joint les modules* $M_0$ *et* $M$ *sur* $A$.

**Démonstration.** Comme $A$ est un anneau de valuation discrète, $M_A$ est un $R_A$-module gradué, plat sur $A$. Comme $K$ est plat sur $A$ on a bien $M_A \otimes_A K = H \otimes_A K = V(K)$. On a la suite exacte (cf. 1.5)

$$0 \to H \otimes_A k \to V(k) \to \operatorname{Tor}_A^1(C,k) \to 0$$

qui s'écrit encore $0 \to J \to M_0 \to M_{-1} \to 0$.

Par ailleurs, la suite exacte $0 \to H_\tau \to H \to H/H_\tau \to 0$ dont le quotient est plat donne, en tensorisant par $k$, la suite $0 \to M_1 \to J \to M \to 0$, d'où un diagramme du type $(M \triangleleft M_0)$ qui donne les propriétés annoncées.

L'assertion sur les cas modulaire et représentable résulte des équivalences $L_\bullet$ modulaire $\iff C$ plat et $L_\bullet$ représentable $\iff H$ plat (cf. 4.1 et 4.2).

On obtient aussitôt, avec 5.8 le corollaire suivant, annoncé dans l'introduction :

**Corollaire 5.9.** *Soient* $A$ *un anneau de valuation discrète,* $K$ *son corps des fractions et* $k$ *son corps résiduel. Soit* $\mathcal{C}$ *une famille de courbes paramétrée par* $A$*. Alors, le module de Rao* $H^1_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}\otimes_A K}$ *au point générique est le point générique d'une déformation plate sur* $A$ *d'un sous-quotient du module de Rao* $H^1_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}\otimes_A k}$ *au point fermé.*

*d) Construction de triades à partir de déformations de sous-quotients : analyse des conditions nécessaires.*

À partir de ce paragraphe l'anneau $A$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante $a$ et de corps résiduel $k$.

On considére une déformation de sous-quotient $M_A \sim M \triangleleft M_0$, le sous-quotient $M \triangleleft M_0$ étant donné par un diagramme $(M \triangleleft M_0)$ comme ci-dessus et on cherche à construire une triade $L_\bullet$ élémentaire (i.e., dont le conoyau est de torsion) qui redonne cette déformation par 5.8. Si $H$ et $C$ désignent le cœur et le conoyau de $L_\bullet$ on a, par 5.8, des conditions nécessaires sur $C$ et $H$ :

**Conditions nécessaires 5.10.** *Avec les notations ci-dessus, on a les conditions :*

$$M_A \simeq H/H_\tau, \quad J = H \otimes_A k, \quad M_{-1} = \operatorname{Tor}_1^A(C,k).$$

*On en déduit* $M = H/H_\tau \otimes_A k$ *et* $M_1 = H_\tau \otimes_A k$*. Si* $C$ *et* $H$ *vérifient ces conditions on dira qu'ils sont compatibles avec la déformation de sous-quotient* $M_A \sim M \triangleleft M_0$.

**Remarques 5.11.**
1) Il est essentiel de noter qu'en général, les conditions 5.10 ne déterminent pas entièrement $C$ et $H$.
2) La condition sur $C$ donne une indication sur la structure de $A$-module de $C$. Comme $C$ est de torsion on a, pour chaque degré $n$, $C_n = \bigoplus_{i=1}^{r_n} A/(a^{n_i})$ avec $n_i > 0$ et on a alors $\operatorname{Tor}_1^A(C_n,k) \simeq C_n \otimes_A k = k^{r_n} = M_{-1,n}$ qui donne $r_n$ (mais pas les $n_i$). La détermination

des structures de $R_A$-modules sur $C$ compatibles avec la donnée de la structure de $R$-module de $M_{-1} = \mathrm{Tor}\,_1^A(C,k)$ n'est pas évidente en général.
3) Du côté de $H$, on a déjà $H/H_\tau = M_A$ et, comme $A$-module, on a $H = H_\tau \oplus H/H_\tau$. Si on pose, pour un degré $n$, $H_{\tau,n} = \bigoplus_{i=1}^{r_n} A/(a^{n_i})$, la formule $H_\tau \otimes_A k = M_1$ permet de déterminer $r_n$. Du point de vue de la structure de $R_A$-module on a la suite exacte $0 \to H_\tau \to H \to H/H_\tau \to 0$ qui se réduit modulo $a$ en $0 \to M_1 \to J \to M \to 0$, mais cela ne détermine pas complètement cette structure. Toutefois, lorsque $H_\tau$ est annulé par $a$ on peut calculer $H$ à l'aide du lemme élémentaire suivant :

**Lemme 5.12.** *Soit $H$ un $R_A$-module gradué. On a une suite exacte :*

$$0 \to aH_\tau \to H \to (H/H_\tau) \times_{(H/H_\tau)\otimes_A k} (H \otimes_A k) \to 0.$$

Examinons l'exemple $(4,0)$ évoqué dans l'introduction de ce chapitre. On considère $M = k(-1)$ comme sous-quotient de $M_0 = R/(X,Y,Z,T^3)$ comme suit : $M_0$ est engendré comme espace vectoriel par $1, t, t^2$, avec $t^3 = 0$ et on prend $J =< t >\simeq R(-1)/(X,Y,Z,T^2)$, $M_{-1} = k$ et $M_1 =< t^2 >\simeq k(-2)$. Dans ce cas, il n'y a pas le choix pour la déformation $M_A$ : on a $M_A = A(-1)$ avec une structure de $R_A$-module triviale. On peut alors déterminer tous les modules $C$ et $H$ compatibles avec ces données :

**Proposition 5.13.** *Avec les notations ci-dessus, $C$ et $H$ sont compatibles avec la déformation de sous-quotient $M_A \sim M \lhd M_0$ si et seulement si on a $C = A/(a^n)$ avec $n > 0$ et une structure de $R_A$-module triviale et $H \simeq R_A(-1)/(X,Y,Z,a^mT,T^2)$ avec $m > 0$.*

**Démonstration.** L'assertion sur $C$ résulte de la formule $\mathrm{Tor}\,_1^A(C,k) = k$. Pour $H$ on a, comme $A$-module, $H = H_1 \oplus H_2$ avec $H_1 \simeq H/H_\tau \simeq A(-1)$ et $H_2 = H_\tau \simeq (A/(a^m))(-2)$ avec $m > 0$. Il reste à préciser la structure de $R_A$-module de $H$. Soient $e$ et $f$ les générateurs de $H_1$ et $H_2$. Vu la réduction des multiplications dans $J = H \otimes_A k$, et quitte à faire un changement de variables dans $R_A$, on peut supposer $Xe = Ye = Ze = 0$ et $Te = f$. On en déduit le résultat.

Retournons au cas général et supposons qu'on ait des modules $C$ et $H$ compatibles avec la déformation $M_A \sim M \lhd M_0$. Pour avoir une triade qui donne cette déformation il reste, comme on l'a vu au paragraphe *a)*, à trouver un élément convenable $u$ de $\mathrm{Ext}\,^2_{R_A}(C,H)$. Comme la donnée de $H$ et de $C$ redonne déjà $M_{-1}$, $M_A$, ainsi que la suite exacte $0 \to M_1 \to J \to M \to 0$, il reste à choisir $u$ pour que l'extension de $M_{-1}$ par $J$ associée à la triade soit bien $M_0$. Avec 5.5 et 5.10 on obtient :

**Proposition 5.14.** *Soient $C$ et $H$ des modules compatibles avec la déformation de sous-quotient $M_A \sim M \lhd M_0$, soit $u \in \mathrm{Ext}\,^2_{R_A}(C,H)$ et soit $L_\bullet = L_\bullet(C,H,u)$ la triade associée. Alors, la déformation de sous-quotient $\mathcal{D}(L_\bullet)$ est égale à $M_A \sim M \lhd M_0$ si et seulement si l'élément $\theta(u) \in \mathrm{Ext}\,^1_R(\mathrm{Tor}\,_1^A(C,k), H \otimes_A k)$ (cf. 5.5) est la classe de l'extension $M_0$ de $M_{-1}$ par $J$.*

Dans le cas de l'exemple $(4,0)$ nous verrons aux paragraphes *e)* et *h)* plusieurs constructions de triades associées au sous-quotient donné en 5.13.

*e) Construction de triades à partir de sous-quotients : la construction triviale.*

Soit $A$ un anneau de valuation discrète d'uniformisante $a$, de corps des fractions $K$ et de corps résiduel $k$. On suppose de plus que $A$ est une **$k$-algèbre**. Nous allons construire une triade sur $A$ qui joint un module $M_0$ et un de ses sous-quotients $M$. Cette construction est très simple et valable dans tous les cas mais elle ne donnera pas, en général, les courbes de plus petit degré, cf. 5.18.3 et §*i)*).

Soit $M_0$ un $R$-module gradué de longueur finie et $M$ un sous-quotient de $M_0$ donné par un diagramme commutatif $(M \triangleleft M_0)$ comme en 5.6. Avec les notations de ce diagramme on pose $j = il$.

**Proposition 5.15.** *Avec les notations ci-dessus, le complexe*

$$M_\bullet = \big(M_1 \otimes_k A \xrightarrow{j \otimes a} M_0 \otimes_k A \xrightarrow{p \otimes a} M_{-1} \otimes_k A\big)$$

*est une triade. Elle est formée de $R_A$-modules gradués libres et de type fini sur $A$ et le foncteur associé $V$, vérifie $V(K) = M \otimes_k K$ et $V(k) = M_0$.*
*Cette triade sera appelée la* **triade triviale** *associée au sous-quotient $M \triangleleft M_0$ (cf. 5.16). Si $M$ est un quotient (resp. un sous-module) de $M_0$ la triade $M_\bullet$ est modulaire (resp. représentable).*

**Démonstration.** C'est une vérification immédiate. Pour la dernière assertion, on a $M_{-1} = 0$ (resp. $M_1 = 0$) si $M$ est un quotient (resp. un sous-module) de $M_0$. En vertu de 4.1 et 4.2 la triade est alors modulaire (resp. représentable).

**Remarques 5.16.**
1) Expliquons l'appellation "triviale" pour la triade construite ci-dessus. On vérifie d'abord les formules suivantes : $C \simeq M_{-1}$ (considéré comme $R_A$-module annulé par $a$), $H_\tau \simeq M_1$ (considéré comme $R_A$-module annulé par $a$), ce qui correspond aux choix triviaux pour les structures de $A$ et de $R_A$-modules de $C$ et $H_\tau$ (cf. 5.11). On a ensuite $M_A \simeq M \otimes_k A$ : $M_A$ est une déformation triviale du sous-quotient $M$ de $M_0$. On déduit de ces formules la structure de $H$ comme produit fibré $H \simeq M_A \times_M J$ (cf. 5.12).
L'élément $u \in \operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, H)$ correspond à l'extension $0 \to H \to E \to M_{-1} \otimes_A k \to C \to 0$, cf. 1.1. On vérifie que l'on a $E_\tau \simeq H_\tau \simeq M_1$ et $E \otimes_A k \simeq M_0$, de sorte que, comme $E_\tau$ est annulé par $a$, $E$ est un produit fibré en vertu de 5.12. On a aussi $(E/E_\tau) \otimes_A k \simeq M_0/M_1$, donc $E/E_\tau$ est une déformation plate de $M_0/M_1$ et on vérifie que cette déformation est, elle aussi, triviale : $E/E_\tau = (M_0/M_1) \otimes_k A$.
On peut aussi comprendre l'élément $u$ de la manière suivante. On part de l'extension $0 \to J \to M_0 \to M_{-1} \to 0$ (dont la classe doit être égale à $\theta(u)$) et l'on en déduit trivialement, en tensorisant par $A$ sur $k$, une extension de $R_A$-modules de $M_{-1} \otimes_k A$ par $J \otimes_A k$. En juxtaposant cette extension avec la présentation évidente de $C = M_{-1}$ : $0 \to M_{-1} \otimes_k A \xrightarrow{1 \otimes a} M_{-1} \otimes_k A \to C \to 0$ on obtient une extension de $C$ par $J \otimes_k A$. Comme $H$ est le produit fibré $(M \otimes_k A) \times_M J$, on a une flèche canonique de $J \otimes_k A$ dans $H$ et l'extension $u$ s'en déduit par fonctorialité.

Le nom de triviale donnée à la triade de 5.15 correspond donc au fait que, pour tous ses éléments constitutifs pour qui un choix se présente à partir des conditions nécessaires

5.10 et 5.14, ce choix est effectué de manière triviale.
2) L'existence de la construction triviale montre qu'il y a toujours une triade qui joint un module à un sous-quotient. Une question plus délicate est l'existence d'une triade qui corresponde à une déformation de sous-quotient $M_A \sim M \triangleleft M_0$ donnée (pas nécessairement triviale). Nous montrerons dans un travail ultérieur qu'une telle triade n'existe que si une certaine condition sur la déformation (la nullité d'un élément de $\mathrm{Ext}\,^3_R(M_{-1}, M_1)$) est vérifiée.
3) La construction triviale n'est pas en général la seule possible qui corresponde à un sous-quotient donné. Nous verrons ci-dessous d'autres exemples de constructions, soit avec des foncteurs triadiques différents de celui de la triade triviale (cf. 5.19), soit avec le même foncteur, mais des triades distinctes (cf. 5.20).

**Exemples 5.17.** Dans tous les exemples on travaille sur une $k$-algèbre qui est un anneau de valuation discrète $A$ d'uniformisante $a$, de corps des fractions $K$ et de corps résiduel $k$.

1) Soit $m$ l'idéal maximal $(X, Y, Z, T)$ de $R$. L'exemple le plus simple de triade s'obtient en prenant pour $M_0$ le $R$-module $R/m = k$ et pour $M$ le module nul, vu comme quotient de $M_0$. On a alors la triade modulaire définie par le module $H = A/(a)$ considéré comme $R_A$-module (en degré 0 et avec des multiplications triviales par $X, Y, Z, T$). Les valeurs du foncteur $V$ aux points générique et fermé de $\mathrm{Spec}\, A$ sont bien 0 et $k$.

Une résolution majeure de cette triade est $R_A(-1)^4 \oplus R_A \xrightarrow{d_1} R_A \to 0$ avec $d_1 = (X\,Y\,Z\,T\,a)$.

2) Un deuxième exemple consiste à prendre les mêmes modules $k$ et 0 mais en considérant cette fois 0 comme sous-module de $k$. La triade est alors donnée par $0 \to A \xrightarrow{a} A$ et on a encore les valeurs prescrites de $V$. On notera qu'on a $V(A) = 0$ de sorte que $V$, qui n'est pas nul, n'est pas de la forme $(V(A) \otimes_A \boldsymbol{.})$.

La triade majeure associée s'écrit, en notation condensée :

$$1^4, 2^6 \xrightarrow{d_1} \underline{0}, 1^4 \xrightarrow{d_0} \underline{0}$$

$$\text{avec} \qquad d_0 = (a\,X\,Y\,Z\,T) \qquad \text{et} \qquad d_1 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ -aI_4 & V \end{pmatrix}$$

où $I_4$ est la matrice identité d'ordre 4, $U$ la matrice $(X,\ Y,\ Z,\ T)$ et où l'on a posé

$$V = \begin{pmatrix} Y & Z & T & 0 & 0 & 0 \\ -X & 0 & 0 & Z & T & 0 \\ 0 & -X & 0 & -Y & 0 & T \\ 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z \end{pmatrix}.$$

3) Dans cet exemple, qui part du sous-quotient correspondant à une éventuelle famille de courbes de $H_{4,0}$, la triade obtenue n'est ni modulaire, ni représentable.

On considère le module $M_0 = R/(X,Y,Z,T^3)$ qui est de dimension 1 en degrés $0,1,2$ et son sous-quotient $M = k(-1)$, concentré en degré 1. La méthode de 5.15 ci-dessus donne une triade mineure qui joint ces modules sur $A$ :

$$R_A(-2)/(X,Y,Z,T) \xrightarrow{\delta_1} R_A/(X,Y,Z,T^3) \xrightarrow{\delta_0} R_A/(X,Y,Z,T)$$

avec $\delta_1(1) = at^2$ et $\delta_0(1) = a$ (où $t$ désigne l'image de $T$ dans le quotient).

On obtient une résolution majeure $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ de la triade précédente en posant $L_1 = 1^3, 2^7, 3$ ; $L_0 = \underline{0}, 1^4$ ; $L_{-1} = \underline{0}$ avec les flèches

$$d_1 = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & aT^2 & T^3 \\ -a & 0 & 0 & Z & T & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & Z & T & 0 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & -X & 0 & -Y & 0 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z & 0 & -a^2T & -aT^2 \end{pmatrix}$$

et $d_0 = (a\ X\ Y\ Z\ T)$.

Nous exhiberons plus loin une triade, joignant les mêmes modules et définissant le même foncteur que $L_\bullet$ mais qui ne lui sera pas pseudo-isomorphe.

*f) Calcul des familles de courbes obtenues à partir des triades triviales.*

**Exemples 5.18.** Nous déterminons ici les familles minimales de courbes associées (entre autres) aux exemples de 5.17. Nous utilisons pour cela les résultats de [HMDP2] où nous avons construit une fonction $q$ qui généralise au cas des familles de courbes celle de [MDP1]. Dans tout ce qui suit c'est de cette nouvelle fonction $q$ qu'il sera question.

1) On considère la triade modulaire de 5.17.1 qui joint le module $k$ au module nul (vu comme quotient de $k$). On voit aisément que le noyau $N$ est l'image de la matrice $s : R_A(-1)^4 \oplus R_A(-2)^6 \to R_A \oplus R_A(-1)^4$ avec

$$s = \begin{pmatrix} U & 0 \\ a\,I_4 & V \end{pmatrix}$$

où $I_4$ est la matrice identité d'ordre 4, où $U = (X\,Y\,Z\,T)$ et où $V$ est la matrice des relations entre $X,Y,Z,T$ déjà vue en 5.17.2.

Le calcul de la famille minimale associée à cette triade a été effectué dans [HMDP2] 3.2. Ces courbes sont de degré 6 et de genre 3, la famille est à spécialité constante. La courbe générique $C$ de la famille $\mathcal{C}$ est une courbe ACM tandis que la courbe spéciale $C_0$ est une courbe de la classe de biliaison de deux droites disjointes qui a même cohomologie qu'une courbe de bidegré $(2,4)$ tracée sur une quadrique lisse, en particulier son module de Rao est concentré en degré 2. Cet exemple est le premier de ceux évoqués dans l'introduction.

1') Cet exemple généralise le précédent. On part d'un module $M_0$ de Koszul (cf. [MDP1] IV.6 ou [MDP3] V.2), $M_0 = R/(f_1,f_2,f_3,f_4)$, où les $f_i$ sont des polynômes homogènes de degrés $n_i$ avec $0 < n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$ et forment une suite régulière de $R$.

On considère le module $H = R_A/(a, f_1, f_2, f_3, f_4)$ et la triade modulaire définie par $H$. La résolution de $H$ est donnée par le complexe de Koszul

$$\cdots \to \bigoplus_{i=1}^{4} R_A(-n_i) \oplus \bigoplus_{1\leq i<j\leq 4} R_A(-n_i - n_j) \xrightarrow{s} R_A \oplus \bigoplus_{i=1}^{4} R_A(-n_i) \xrightarrow{a\oplus U} R_A \to H \to 0$$

avec $U = (f_1\, f_2\, f_3\, f_4)$ et $s$ la matrice par blocs comme en 5.17.2 mais où, dans $V$, les $f_i$ remplacent $X, Y, Z, T$. Cette résolution donne à la fois la triade et la flèche $s$ qui permet le calcul des invariants (cf. [HMDP2] 3.1). On vérifie d'abord qu'on a $b_0 = n_1 - 1$. Il est clair qu'on a $b_0 \geq n_1 - 1$ et il y a deux cas : si $n_1 < n_2$ on a $\alpha_{n_1} = 1$ et $\beta_{n_1} = 0$, donc $n_1 - 1 \geq b_0$ par [HMDP2] *loc. cit.* ; si $n_1 = n_2$ on a $\alpha_{n_1} = \beta_{n_1} = 1$ mais le module engendré par les colonnes de la matrice $s_1(t)$ n'est pas libre de rang 1 (car la suite est régulière).

L'analyse des valeurs de $\alpha_n$ et $\beta_n$ se fait alors comme dans [MDP1] ou [MDP3] et donne les valeurs de la fonction $q$ ou plutôt celles de $q^\sharp$ : on a, en posant comme dans *loc. cit.*, $\mu = \sup(n_1 + n_4, n_2 + n_3)$,

$$q^\sharp(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < n_1 + n_2 \ ; \\ 1, & \text{si } n_1 + n_2 \leq n < n_1 + n_3 \ ; \\ 2, & \text{si } n_1 + n_3 \leq n < \mu \ ; \\ 3, & \text{si } n \geq \mu. \end{cases}$$

En particulier on obtient une famille minimale de courbes paramétrée par $A$ avec la résolution

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A}(-n_1 - n_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A}(-n_1 - n_3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A}(-\mu) \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(h) \to 0$$

où $\mathcal{N}$ est défini par la suite $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A} \bigoplus \bigoplus_{i=1}^{4} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A}(-n_i) \xrightarrow{(a,U)} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A}$. Comme dans l'exemple 1), la famille est à spécialité constante, la courbe générique est ACM et la courbe spéciale est dans la classe de biliaison du module de Koszul $M_0$. On notera que cette dernière courbe n'est jamais une courbe minimale.

2) On considère la triade vue en 5.17.2 qui joint encore le module nul et le module $k$, mais avec 0 vu maintenant comme sous-module de $k$. Le calcul de la résolution de $N$ donne la matrice $s : 2^6, 3^6 \to 1^4, 2^6$ :

$$s = \begin{pmatrix} V & 0 \\ aI_4 & V' \end{pmatrix}$$

où $V$ et $V'$ sont les matrices du complexe de Koszul associé à la suite $(X, Y, Z, T)$. Le calcul de la fonction $q$ a été effectué dans [HMDP2] 3.3. La famille minimale de courbes associée à cette triade est encore une famille de courbes de degré 6 et genre 3 comme dans l'exemple 1), mais, cette fois-ci, il s'agit d'une famille à postulation constante dont la courbe générique est ACM et dont la courbe spéciale est dans la classe de biliaison de deux droites disjointes et a même cohomologie que la réunion d'une quartique plane et de deux droites qui coupent chacune la quartique transversalement en un point. En particulier le module de Rao a un unique terme non nul en degré 1 (et non plus en degré 2 comme dans l'exemple 1). Cet exemple est le deuxième de ceux évoqués dans l'introduction. Pour une étude plus approfondie du schéma de Hilbert $H_{6,3}$ cf. [AA].

On notera que si on fait une biliaison $(6,+2)$ à partir de la famille 1) et une biliaison $(4,+3)$ à partir de la famille 2), on obtient des familles de courbes lisses de degré 18 et genre 39, dont les fibres spéciales ont pour modules $k(-4)$, et qui sont limites de courbes ACM de deux façons différentes. On a donc, dans le schéma de Hilbert des courbes lisses $H^0_{18,39}$, deux composantes irréductibles qui ont une intersection non vide. On retrouve ainsi l'exemple de Sernesi, cf. [S] ou [MDP1], X 5.8 p. 193.

3) On reprend la triade $L_\bullet$ de l'exemple 5.17.3 qui joint le module $M_0 = R/(X,Y,Z,T^3)$ et son sous-quotient $M = k(-1)$ et dont on espère qu'elle peut fournir une famille de $H_{4,0}$.

On calcule (en utilisant Macaulay) une résolution minimale du noyau $N$ de la triade. On obtient la matrice $s : 2^3, 3^8, 4^3 \to 1^3, 2^7, 3$ avec

$$s = \begin{pmatrix}
-Z & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & aT^2 & 0 & 0 & T^3 & 0 & 0 \\
0 & -Z & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & aT^2 & 0 & 0 & T^3 & 0 \\
X & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & aT^2 & 0 & 0 & T^3 \\
a & 0 & 0 & T & 0 & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -Z & 0 & -Y & 0 & 0 & -a^2T & 0 & 0 & -aT^2 & 0 & 0 \\
0 & a & 0 & 0 & T & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -Z & X & 0 & 0 & 0 & -a^2T & 0 & 0 & -aT^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & X & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a^2T & 0 & 0 & -aT^2 \\
0 & 0 & a & 0 & 0 & T & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & -X & -Y & -Z & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & -X & -Y & -Z
\end{pmatrix}$$

On trouve dans ce cas $\alpha_2 = \beta_2 = 2$ et $b_0 = 1$, puis $\alpha_3 = \beta_3 = 6$, donc la fonction $q$ est donnée par $q(2) = 1$, $q(3) = 4$, $q(4) = 1$ et on obtient une famille minimale de courbes de degré 12 et genre 16. On constate donc que la construction triviale effectuée en 5.15 ne donne pas la famille de courbes de degré 4 et genre 0 escomptée.

*g) Construction de triades modulaires : variation autour du module $H$.*

Ce paragraphe reprend la problématique entamée au §*d)*. Rappelons (cf. [MDP1] I 3.6) que deux modules gradués sont dits de même type si on passe de l'un à l'autre par un changement de variables linéaire dans $R$. Les exemples suivants, pourtant donnés dans le cas modulaire où le module $H$ détermine la triade à *psi* près (cf. 4.5), montrent successivement :

– qu'étant donnés un module $M_0$ et deux quotients $M$ et $M'$ de même type, les triades triviales joignant $M_0$ et $M$ (resp. $M_0$ et $M'$) ne sont pas, en général, pseudo-isomorphes,

– que lorsque le quotient $M$ est fixé, il n'y a pas unicité (à *psi* près) de la triade joignant $M_0$ et $M$.

**Exemples 5.19.** Considérons le module $M_0 = R/(X, Y, Z^2, T^3)$ (de dimensions $1, 2, 2, 1$ en degrés $0, 1, 2, 3$). Tout quotient $M$ de $M_0$ qui est un module monogène de dimensions $1, 1$ en degrés $0, 1$ est de la forme $R/(X, Y, \lambda Z + \mu T, Z^2, ZT, T^2)$ et tous ces modules sont de même type.

Il y a deux cas, ($\mu \neq 0$ et $\mu = 0$) qui correspondent au fait que le noyau $M_1$ de la projection de $M_0$ sur $M$ est monogène ou non. Dans le premier cas on peut prendre, par exemple, $M_1 =< z + t > \subset M_0$, donc $M_0/M_1 = R/(X, Y, Z + T, Z^2) = M$. Dans le second cas on a $M'_1 =< z, t^2 > \subset M_0$, donc $M_0/M'_1 = R/(X, Y, Z, T^2) = M'$.

Les triades triviales associées à ces quotients sont respectivement déterminées par les modules

$$H = R_A/(X, Y, a(Z + T), Z^2, T^3) \quad \text{et} \quad H' = R_A/(X, Y, aZ, Z^2, aT^2, T^3).$$

Il est facile de calculer les courbes minimales correspondantes (en déterminant des résolutions de ces modules par Macaulay). Dans le cas de $H$ on obtient une famille de courbes de degré 7 et genre 4, dans le cas de $H'$ une famille de courbes de degré 11 et genre 13. On constate donc que la triade définie par $H$ est meilleure que celle associée à $H'$ en ce sens qu'elle donne des familles de courbes de plus bas degré. Nous montrerons dans un travail ultérieur que cela est lié au fait que le module $\mathrm{Tor}\,^1_A(H, k)$ (ici isomorphe à $M_1 = H_\tau \otimes_A k$ car $H_\tau$ est annulé par $a$) est monogène, ce qui n'est pas le cas de $\mathrm{Tor}\,^1_A(H', k) \simeq M'_1$.

Il y a toutefois un moyen d'obtenir, en partant de ce même sous-module $M'_1 =< z, t^2 >$ et du quotient $M' = M_0/M'_1$, une triade donnant elle aussi une famille de courbes de degré 7 et genre 4, mais il faut utiliser cette fois une triade non triviale. Précisément, on considère le $R_A$-module $H'' = R_A/(X, Y, aZ, Z^2 + aT^2, T^3)$ qui est, en quelque sorte, une variante compactée de $H$. La triade définie par $H''$ joint $M' = M_0/M'_1$ et $M_0$ comme celle donnée par $H'$, mais ces triades sont distinctes car les foncteurs associés le sont ($H'$ est un quotient propre de $H''$). On vérifie facilement que la famille minimale associée à $H''$ est encore de degré 7 et genre 4. La différence entre ces deux triades se voit au niveau des sous-modules de torsion $H'_\tau$ et $H''_\tau$. Ces modules sont tous deux engendrés par les images de $Z$ et $T^2$, mais $H'_\tau$ est annulé par $a$ tandis que $H''_\tau$ est annulé seulement par $a^2$. Cela peut encore se traduire, comme ci-dessus, par le fait que le module $\mathrm{Tor}\,^1_A(H'', k)$ est monogène, tandis que $\mathrm{Tor}\,^1_A(H', k)$ ne l'est pas.

*h) Constructions de triades à partir d'un sous-quotient : bis.*

Ce paragraphe reprend la problématique du §*d)* au cran suivant : on suppose qu'on a déterminé (à partir d'un sous-quotient $M$ de $M_0$) deux $R_A$-modules $C$ et $H$

compatibles. On suppose $C$ de torsion et on cherche une triade majeure élémentaire $L_{\bullet} = L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1}$ qui admette $C$ et $H$ comme conoyau et cœur. On a vu au paragraphe *a)* qu'un élément $u$ de $\operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, H)$ fournit une telle triade, pourvu que l'image $\theta(u)$ de cet élément dans $\operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Tor}^A_1(C, k), H \otimes_A k)$ (cf. 5.5) corresponde à l'extension $M_0$ de $M_{-1}$ par $J$.

Comme au paragraphe *a)* on considère une résolution libre graduée de $C$ :

$$(*) \qquad \cdots \to P_3 \xrightarrow{\delta_2} P_2 \xrightarrow{\delta_1} P_1 \xrightarrow{\delta_0} P_0 \to C \to 0$$

et l'élément $u$ de $\operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, H)$ correspond à un morphisme $\widehat{u} : P_2 \to H$ vérifiant $\widehat{u}\delta_2 = 0$ (modulo ceux qui proviennent de $P_1$).

**Exemple 5.20.** On reprend l'exemple 1.35.c. On a $C = k$, $H = k(-2)$ et la résolution de $C$ est donnée par le complexe de Koszul. On a $P_2 = R_A(-1)^4 \oplus R_A(-2)^6$, donc $\widehat{u} : P_2 \to H$ correspond à un élément de $k^6$. Comme les flèches de cette résolution sont à coefficients dans l'idéal $(a, X, Y, Z, T) = (a, U)$ la condition $\widehat{u}\delta_2 = 0$ est automatique. Il y a deux cas opposés (qui correspondent à ceux envisagés en 1.35.c) : $\widehat{u} = 0$ et $\widehat{u} \neq 0$, donc surjectif.

1) Dans le cas $\widehat{u} = 0$ on trouve la triade suivante (en notation chiffrée) :

$$1^4, 2^6 \oplus 2, 3^4 \xrightarrow{d_1} \underline{0}, 1^4 \oplus 2 \xrightarrow{d_0} \underline{0}, \quad \text{avec} \quad d_0 = (a, U, 0) \quad \text{et}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & 0 \\ -aI_4 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & U \end{pmatrix}$$

où $U, V$ sont les matrices usuelles de Koszul. C'est la triade majeure associée à la deuxième triade de 1.35.c. Le noyau de cette triade est de rang 10.

La famille minimale de courbes associée a une résolution :

$$2^2, 3^4, 4^3 \to [1^4, 2^7, 3^4 \to \underline{0}, 1^4, 2 \to \underline{0}]$$

où la notation correspond à une résolution $0 \to P \to N \to I_{\mathcal{C}}(h) \to 0$ avec $P = 2^2, 3^4, 4^3$ et pour $N$ le noyau d'une triade $1^4, 2^7, 3^4 \to \underline{0}, 1^4, 2 \to \underline{0}$. Le décalage $h$ est ici égal à 4 et la résolution est équivalente, du point de vue de la caractéristique d'Euler, à celle obtenue en simplifiant tous les chiffres possibles, c'est à dire (après décalage) $8^3 \to 6^4$. On obtient une famille de courbes de degré 24 et genre 65.

2) Dans le cas surjectif on prend $L_0 = P_1$ et $d_0 = \delta_0 = (a, U)$, on appelle $e_1, \cdots, e_4; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_6$ la base de $P_2$ et on choisit $\widehat{u} : P_2 \to H$ qui envoie $\epsilon_1$ sur 1 et les autres sur 0. On a alors la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Im} \delta_2 \to \operatorname{Ker} \widehat{u} \to \operatorname{Ker} \overline{u} \to 0$$

et il est clair que $\operatorname{Ker} \widehat{u}$ est engendré par $e_1, \cdots, e_4, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_6, X\epsilon_1, Y\epsilon_1, Z\epsilon_1, T\epsilon_1$. Pour $\operatorname{Ker} \overline{u}$ les deux derniers vecteurs sont inutiles car ils sont dans l'image de $\delta_2$ modulo $\epsilon_2, \cdots, \epsilon_6$.

On peut donc prendre $L_1 = 1^4, 2^5, 3^2$ avec la flèche $d_1$ obtenue en composant l'injection canonique de $\operatorname{Ker} u$ dans $P_2$ avec

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ -aI_4 & V \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire en remplaçant dans $\delta_1$ la colonne de degré 2 ${}^t(0, Y, -X, 0, 0)$ par les deux colonnes de degré 3 : ${}^t(0, XY, -X^2, 0, 0)$ et ${}^t(0, Y^2, -XY, 0, 0)$. Cette triade est la triade majeure associée à la première triade de 1.35.c. Le noyau de $d_1$ est cette fois-ci de rang 7.

La famille minimale de courbes associée a pour chiffres

$$2^2, 3^2, 4^2 \to [1^4, 2^5, 3^2 \to \underline{0}, 1^4 \to \underline{0}].$$

Le décalage est 2 et en simplifiant et décalant on obtient une résolution du type $6^2 \to 4^3$ soit une courbe de degré 12 et genre 17.

Deux remarques s'imposent à propos de cet exemple :

a) Le cas de l'extension non triviale est meilleur que l'autre (au sens où il donne un plus petit décalage).

b) La famille $12, 17$ ainsi obtenue est la meilleure possible car la courbe minimale pour le module $k \oplus k(-2)$ est une $12, 17$ , cf. [MDP1] IV 6.10.

*i) L'exemple des courbes de degré* $4$ *et genre* $0$ *: construction de la triade.*

Nous reprenons ici l'exemple qui nous a servi de fil conducteur tout au long de ce paragraphe. Si on part du module $M_0 = R/(X, Y, Z, T^3)$ et de son sous-quotient $k(-1)$ on a vu en 5.13 qu'une triade reliant ces modules a pour invariants $C = R_A/(a^p, X, Y, Z, T)$ et $H = R_A(-1)/(X, Y, Z, a^nT, T^2)$. On prendra désormais $p = n = 1$. On a trouvé en 5.17.3 une triade admettant ces éléments, mais la courbe minimale était de degré 12 et genre 16. On cherche donc à construire une autre triade dont la famille minimale soit de plus petit degré.

La résolution de $C$ est toujours donnée par le complexe de Koszul, comme en 5.20. On a donc, en particulier $P_2 = 1^4, 2^6$ et on s'intéresse aux $\widehat{u} : P_2 \to H$.

On note tout d'abord que la contrainte de la proposition 5.14 impose à $\widehat{u}$ d'être surjectif. En effet, l'élément $\theta(u)$ de $\operatorname{Ext}^1_{R_A}(M_{-1}, J)$ doit correspondre à $M_0$ et on vérifie que cela implique que l'homomorphisme $v : P_2 \otimes_A k \to H \otimes_A k$ induit par $\widehat{u}$ est surjectif, donc aussi $\widehat{u}$ par Nakayama.

On reprend les notations de 5.20 pour la base de $P_2$, $e_1, \cdots, e_4; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_6$. Il est facile de déterminer les $\widehat{u} : P_2 \to H$ surjectifs. On pose $\widehat{u}(e_i) = a_i$ et $\widehat{u}(\epsilon_i) = b_i$. En écrivant $\widehat{u}\delta_2 = 0$ et en travaillant dans $H = k[a, T]/(aT, T^2)$ on montre que, si $\widehat{u}$ est surjectif, on doit avoir $a_4 \in k^*$. À changement de base près on peut supposer les autres $a_i$ nuls et il y a alors deux cas que nous étudions ci-dessous :

1) le cas où tous les $b_i$ sont nuls,

2) le cas où l'un des $b_i$ est non nul et on peut alors supposer que c'est $b_1$.

1) Le premier exemple va redonner la triade triviale, donc, cf. 5.18.3, une courbe $(12, 16)$. On définit $\widehat{u}$ en envoyant $e_4$ sur $\overline{1}$ dans $H$ et les autres sur 0. On a bien $\widehat{u}\delta_2 = 0$

(car la ligne de $\delta_2$ qui correspond à $e_4$ est $(0,0,-X,0,-Y,-Z,0,0,0,0)$ qui est nulle dans $H$). Il est facile de calculer $\operatorname{Ker}\widehat{u}$, qui est engendré par $e_1, e_2, e_3, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_6, Xe_4, Ye_4, Ze_4, aTe_4, T^2e_4$. Dans $\operatorname{Ker}\overline{u}$ (i.e. modulo $\operatorname{Im}\delta_2$) les vecteurs $Xe_4, Ye_4, Ze_4$ sont inutiles (car ils sont dans $\operatorname{Im}\delta_2$ modulo $e_1, e_2, e_3$). On prend donc $L_1 = R_1 = 1^3, 2^6, 2, 3$ et on obtient $d_1$ en composant l'injection $\operatorname{Ker}\widehat{u} \subset P_2$ avec $\delta_1$ ce qui donne exactement la matrice obtenue en 5.17. On note que $\operatorname{Ker}\overline{u}$ est de rang 11 et le noyau $N$ de rang 7.

2) Le deuxième exemple va donner une triade dont la courbe minimale sera la $(4,0)$ tant convoitée.

On prend ici $\widehat{u}(e_4) = \overline{1}$, $\widehat{u}(\epsilon_1) = -\overline{T}$ et les autres nuls. On vérifie $\widehat{u}\delta_2 = 0$. Pour le $\epsilon_1$ la ligne correspondante de $\delta_2$ est $(-a, 0, \cdots, 0, T, Z)$ et $aT, T^2, ZT$ sont bien nuls dans $H$. On montre que le noyau de $\overline{u}$ est engendré par les images des $e_i$ $(i = 1,2,3)$, des $\epsilon_j$ $(j = 2, ..., 6)$ et par $Te_4 + \epsilon_1$. On en déduit $R_1 = L_1 = 1^3, 2^6$, d'où la triade

$$L'_\bullet = (1^3, 2^6 \xrightarrow{d'_1} \underline{0}, 1^4 \xrightarrow{d'_0} \underline{0}) \quad \text{avec} \quad d'_0 = d_0 = (a, X, Y, Z, T) \quad \text{et}$$

$$d'_1 = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T^2 \\ -a & 0 & 0 & Z & T & 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & Z & T & 0 & -X \\ 0 & 0 & -a & -X & 0 & -Y & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z & -aT \end{pmatrix}$$

On voit que $\operatorname{Ker}\overline{u}$ est de rang 9 et $N$ de rang 5.

*j) L'exemple des $(4,0)$ : construction de la famille de courbes.*

On calcule (en utilisant Macaulay) une résolution minimale du noyau $N$ de la triade $L'_\bullet$ construite en *i)*. On obtient ainsi la matrice $s : 2^2, 3^6, 4^2 \to 1^3, 2^6$ avec

$$s = \begin{pmatrix} -Z & 0 & 0 & 0 & 0 & -YT & -Y^2 & aT^2-XY & 0 & T^3 \\ 0 & -Z & 0 & 0 & 0 & -XT & aT^2+XY & X^2 & T^3 & 0 \\ X & Y & 0 & 0 & T^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & T & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z & 0 & 0 & aY & 0 & -a^2T & -Y^2 & -aT^2-XY \\ 0 & a & 0 & T & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z & 0 & -aX & -a^2T & 0 & -aT^2+XY & X^2 \\ 0 & 0 & X & Y & -aT & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Z & 0 & -aY & -aX & -YT & -XT \end{pmatrix}$$

On trouve $\alpha_2 = 2, \beta_2 = 1$ et $b_0 = 1$, puis $\alpha_3 = 5, \beta_3 = 4$, donc la fonction $q$ est donnée par $q(2) = 1$ et $q(3) = 3$ et on obtient une famille de courbes $\mathcal{C}$ avec la résolution :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-3)^3 \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \to 0$$

$$\text{avec} \quad 0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-1)^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-2)^6 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-1)^4 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A} \to 0.$$

Il s'agit d'une famille de courbes de degré 4 et genre 0, dont la courbe générique a la cohomologie d'une courbe de bidegré $(1,3)$ sur une quadrique et la courbe spéciale celle de la réunion disjointe d'une cubique plane et d'une droite. Une conséquence de l'existence de cette famille est le théorème suivant (il s'agit du troisième exemple de l'introduction) :

**Théorème 5.21.** *Le schéma de Hilbert $H_{4,0}$ des courbes localement Cohen-Macaulay de degré 4 et genre 0 de $\mathbf{P}^3$ est connexe.*

**Démonstration.** On sait, cf. [MDP4] ou [El], que le schéma de Hilbert est réunion de deux sous-schémas irréductibles $H_1$ (ouvert) et $H_2$ (fermé), tous deux de dimension 16 avec les cohomologies des deux types évoqués ci-dessus. L'existence de la famille de courbes construite ci-dessus atteste qu'il y a un point $t$ de $H_2$ dans l'adhérence de $H_1$. Alors, $H_{4,0}$ est l'union des deux connexes $\overline{H_1}$ et $H_2$ qui ont une intersection non vide. Il est donc connexe. Bien entendu, comme les dimensions sont égales $H_2$ est seulement sous-adhérent à $H_1$ (i.e. $\overline{H_1} \cap H_2 \neq \emptyset$ et non $\overline{H_1} \subset H_2$ ). Les courbes de $H_2$ réunions disjointes d'une cubique plane et d'une droite ne sont pas dans l'adhérence de $H_1$ (car ce sont des points lisses du schéma de Hilbert). Les courbes de $H_2$ qui sont dans l'adhérence de $H_1$ sont non réduites, cf. [MDP4] 0.6 et 5.22 ci-dessous.

**Remarque 5.22.** On peut expliciter une famille du type ci-dessus : on prend la réunion des courbes d'idéaux

$$J_a = (X^2, XY, Y^2, X - aY) \qquad \text{et} \qquad J = (X^2, XZ, Z^2, XY - ZT).$$

Elle est définie par l'idéal $I_a$ de $R_A$ :

$$I_a = (X^2, XYZ, Y^2Z^2, XY^3 - Y^2ZT, XZ^2 - aYZ^2, -XZT - aXY^2 + aYZT)$$

et on vérifie qu'il s'agit bien d'une famille plate de courbes de degré 4 et genre 0 de la forme annoncée.

**Remarque 5.23.** Les deux triades considérées ci-dessus (cf. f)) qui joignent toutes deux les modules $k(-1)$ et $R/(X,Y,Z,T^3)$ ne sont pas pseudo-isomorphes car les courbes minimales associées ne sont pas les mêmes (cf. 3.11). En revanche on peut montrer en utilisant les méthodes évoquées en 1.36 que les foncteurs associés sont les mêmes ce qui fournit un nouvel exemple du type de 1.35.c.

**Remarque 5.24.** Dans le cas général on ignore si le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ est connexe. C'est vrai pour $d = 2$ (il est irréductible) et Nollet l'a montré pour $d = 3$, cf. [N]. La notion de triade peut être une voie d'accès à ce problème. Ainsi, S. Aït-Amrane a montré par cette méthode que le schéma de Hilbert des courbes de degré $d$ et de genre $(d-3)(d-4)/2$ est connexe, généralisant le cas de $H_{4,0}$, cf. [AA].

**Références bibliographiques.**


[AA] Aït-Amrane S., Sur le schéma de Hilbert $H_{d,(d-3)(d-4)/2}$, en préparation.

[AG] Hartshorne R., Algebraic geometry, Graduate texts in Mathematics 52, Springer Verlag, 1977.

[BB] Ballico E. et Bolondi G., The variety of module structures, Arch. der Math. 54, 1990, 397-408.

[BBM] Ballico E., Bolondi G. et Migliore J., The Lazarsfeld-Rao problem for liaison classes of two-codimensional subschemes of $\mathbf{P}^n$, Amer. J. of Math., 113, 117-128, 1991.

[E] Eisenbud D., Commutative algebra, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1995.

[El] Ellia Ph., On the cohomology of projective space curves, Bolletino U.M.I. 7, 9-A, 593-607, 1995.

[G] Ginouillac S., Sur les schémas des modules de Rao de longueur 3, note CRAS, t. 320, Série I, 1327-1330, 1995.

[H] Hartshorne R., Coherent functors, à paraître, Advances in Math.

[HMDP1] Hartshorne R., Martin-Deschamps M. et Perrin D., Un théorème de Rao pour les familles de courbes gauches, rapport de recherche LMENS-97-15, 1997.

[HMDP2] Hartshorne R., Martin-Deschamps M. et Perrin D., Construction de familles minimales de courbes gauches, rapport de recherche LMENS-97-29, 1997.

[Ho] Horrocks G., Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, Proc. London Math. Soc. 14, 689-713, 1964.

[LR] Lazarsfeld R. et Rao A. P., Linkage of general curves of large degree, Lecture notes 997, Springer Verlag, 1983, 267-289.

[M] Matsumura H., Commutative Ring Theory, Cambridge University Press 8, 1989.

[MDP 1] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Sur la classification des courbes gauches, Astérisque, Vol. 184-185, 1990.

[MDP 2] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Courbes gauches et Modules de Rao, J. reine angew. Math. 439 (1993), 103-145.

[MDP3] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Construction de courbes lisses : un théorème à la Bertini, rapport de recherche du LMENS 94-14, 1994.

[MDP4] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Le schéma de Hilbert des courbes localement de Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., $4^e$ série, t. 29, 757-785, 1996.

[N] Nollet S., The Hilbert scheme of degree three curves, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., $4^e$ série, t. 30, 367-384, 1997.

[R] Rao A.P., Liaison among curves in $\mathbf{P}^3$, Invent. Math., 50, 1979, 205-217.

[RD] Hartshorne R., Residues and duality, Lecture Notes in Math. 20, Springer Verlag, 1966.

[S] Sernesi E., Un esempio di curva ostruita in $\mathbf{P}^3$, Seminario di variabili complesse, Universita di Bologna (1981).

[V] Verdier J.-L., Catégories dérivées, état 0, *in* SGA $4\frac{1}{2}$, Lecture Notes in Math. 569, Springer Verlag, 1977.